丘成桐主编

数学翻译丛书

# VORLESUNGEN ÜBER DIE ENTWICKLUNG DER MATHEMATIK IM 19. JAHRHUNDERT (TEIL II)

F. 克莱因 著　李培廉 译

# 数学在19世纪的发展（第二卷）



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

丘成桐主编

数学翻译丛书

# 数学在19世纪的发展

## (第二卷)

Shuxue Zai 19 Shiji De Fazhan

F. 克莱因 著　　李培廉 译




International Press

**内容提要**

本书是 F. 克莱因的名著《数学在 19 世纪的发展》的第二卷。与第一卷有所不同，它是专门讲述不变量理论以及相对论的数学源头，即相对论的数学史前史的，其中也包括了克莱因本人的一些研究成果。从数学上来讲，狭义相对论可以说就是在 Lorentz 变换群下的不变量理论，而广义相对论则可说是在一般点变换群下的不变量理论。在这个意义上，相对论与克莱因的《Erlangen 纲领》在思想上是一脉相承的。相对论与 19 世纪数学在思想上与历史上的联系第一次在本书中得到了详细的论述。

本书不再是按时间发展的顺序讲述，而是将不变量理论及其在物理学中的应用归拢到一起做系统的讲述。时至今日，它仍是学习不变量理论及其应用的一本极好的教材，对学习数学和物理的学生和教师都有极高的参考价值，也适合对数学及科学思想文化发展感兴趣的读者阅读。

**图书在版编目（CIP）数据**

数学在 19 世纪的发展．第 2 卷 /（德）克莱因（Klein, F.）著；李培廉译．— 北京：高等教育出版社，2011.11

（数学翻译丛书 / 丘成桐主编）

ISBN 978-7-04-032284-2

Ⅰ．①数…　Ⅱ．①克…②李…　Ⅲ．①数学史－研究－世界－19 世纪

Ⅳ．①O11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 154657 号

策划编辑　李　鹏　　责任编辑　李　鹏　　封面设计　王凌波　　版式设计　王　莹

责任校对　殷　然　　责任印制　朱学忠

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 咨询电话 | 400-810-0598 |
| 社　　址 | 北京市西城区德外大街 4 号 | 网　　址 | http://www.hep.edu.cn |
| 邮政编码 | 100120 | | http://www.hep.com.cn |
| 印　　刷 | 北京信彩瑞禾印刷厂 | 网上订购 | http://www.landraco.com |
| 开　　本 | 787mm × 960mm 1/16 | | http://www.landraco.com.cn |
| 印　　张 | 20.75 | 版　　次 | 2011年11月第1版 |
| 字　　数 | 410 千字 | 印　　次 | 2011年11月第1次印刷 |
| 购书热线 | 010-58581118 | 定　　价 | 69.00 元 |

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。



物 料 号　32284-00

# 《数学翻译丛书》序

改革开放以后, 国内大学逐渐与国外的大学增加交流。无论到国外留学或邀请外地学者到中国访问的学者每年都有增长, 对中国的科学现代化都大有帮助。但是在翻译外国文献方面的工作尚不能算多。基本上所有中国的教科书都还是由本国教授撰写, 有些已经比较陈旧, 追不上时代了。很多国家, 例如俄罗斯、日本等, 都大量翻译外文书本来增长本国国民的阅读内容, 对数学的研究都大有裨益。高等教育出版社和海外的国际出版社有见及此, 开始计划做有系统的翻译, 由王元院士领导, 北京的晨兴数学中心和杭州的浙江大学数学科学研究中心共同组织数学教授进行这个工作。参与的教授很多, 有杨乐院士, 刘克峰教授等等。我们希望这套翻译书能够使我们的大学生有更多的角度来看数学, 丰富他们的知识。海外的出版公司如美国数学学会等多有帮助, 我们谨此鸣谢。

丘成桐 (Shing-Tung Yau)<br>2005 年 1 月

# 编者前言

呈现在读者面前的是本讲义的第二卷, 也是它的最后一卷, 完成于 1915 年到 1919 年期间, 那正是广义相对论吸引着全球数学家和物理学家的年代。Felix Klein, 作为一个七十岁高龄的老人, 以异乎寻常的精力投入到这一新理论的研究之中。在这一研究时期所集结起来的讲座笔录、通信、演讲稿、笔记和论文稿, 由 Klein 本人整理, 装满了整整七大公文包。构成本卷基础的只是其中很小一部分。另有一部分, Klein 已以单篇论文的形式发表。但是很多都已经写出了很详细的大纲的底稿, Klein 已经不再能把它们最终完成了。

所以这本第二卷仍然是残缺不全的。原计划从最初的不变量理论在几何学中的发轫讲起, 一直系统地讲到 Einstein 的引力理论为止。Klein 本人所关心更多的是在 Einstein 学说的数学源头 (数学的史前史), 而不是在它的最终物理成型上。他把这些数学的史前史写成了三章, 还没有决定就这样将它们付印。本书就是它们几乎没变的翻印。

第四章计划讲广义相对论, 以及特别是讲在切触变换和连续群的 Lie 理论的观点下的 Hamilton 力学。遗憾的是这章没有完成。在这方面有许多不同年份的底稿, 但其中没有一份能达到令编者将它加工出版时, 不会使编者以不可允许的方式把个人的表述与 Klein 的混起来。

第四章的缺失对本书的影响主要是在它的自身结构上, 而对它的出版意义自然不会有多大的影响。我们并不缺少对相对论的这样的一种表述。相反, 这个现代理论与 19 世纪的数学在思想上以及在历史上的联系, 却是第一次在本书中得到了详细的叙述。这本第二卷在预备知识、数学素养以及在独立思考方面可能比第一卷有稍高一些的要求; 而传记性的内容相对于第一卷则退居其次。

文字的编辑是由较年轻的那位编者独立承担的。和第一卷一样, 指导原则仍然

是尽可能不改动 Klein 的原稿。即便这样，一些文体的改动还是不可避免的；一本书不可能从头到尾像一本为范围有限的读者所准备的讲稿那样，只用一种口气说话。文字未作任何实质的改变。但是科学在 Klein 的文稿完成后的这十年来的后续发展，使得有必要作一些补充；这首先就是加了许多脚注，和第一卷一样，这些脚注附加一个 (H.)，以便与 Klein 本人的脚注相区别，其次就是在每章末尾的注释，它们在文本中的对应位置如通常那样，用记号 * 来标出。还有，这些注释是针对有素养的读者，写得比较简洁。

在阅读校样上，Neugebauer，Friedrichs，Lewy 和 Grell 等诸位先生给了我们宝贵的帮助。我们感谢 D. J. Struik 先生审阅文稿，给了我们实实在在有力的鼓励。

Göttingen, 1927 年 10 月.

R. Courant,
St. Cohn-Vossen

# 目　录

# 引　言

在第一卷中我们是以讲述离散变换群的理论以及在该变换群下不变的“自守”函数于近几十年来在数学的各个分支所获得的意义来结束该卷的.

现在我们转来谈连续变换群，它们在与离散群的同一时空里，获得了不亚于前者的广泛发展和意义. 但是我们的叙述不会严格按时间的顺序来展开. Lie 的深入广泛的工作，在 1870 年发轫于对纯粹几何的研究，很快就在微分方程的整个领域产生了深远的影响，可是眼下我们还要向以前推一推. 我们宁可要把它与第一卷第 4 章谈“代数”几何发展的那部分内容联系在一起. 根据我于 Erlanger Programm (Erlangen 纲领) (1872) 中提出的基本原则，几何学中的不同方向采用的起始公设就可以这样来表征，即它们都是处理某个简单的线性变换群的不变理论. 现在又出现了一些十分值得注意的动向. 几何理论按照奠定它们基础的变换群来分类的想法也就扩展到了力学和数学物理的领域，并且也就此成了理解今天处于主流地位的思想的可靠向导. 我这里是指那些集结在相对论名下的思想. 它们最初的形成与几何学家的研究工作毫无关系，而是由与 Maxwell 电磁场的观念相联系的问题发展而来的. 它们无意中导致了与我们的纯粹数学的原理相似的表述，这一点是一个最惊人的例子，它表明，尽管存在种种新的专门化的研究方向，数学思想的重大进展的统一性总是时不时会一再地走到前台来. 我的整个讲述的意图有太多是涉及这种对比的，我不用在这里多谈. 反正我在这方面已深入谈了不少，例如，我在第一卷的第 5 章就已经讲了力学和数学物理的发展，一直讲到了包括 Maxwell 的研究工作在内的内容. 在下面要讲的内容可以说就是将零星分散在第一卷中的相关内容归纳在一起而成的两章. 通过用简单的例子来诠释 Erlangen 纲领的基本思想，也就同时为今后讲 Lie 的研究工作打下了一个很好的基础.

要想能够达到这样设定的目标无疑需要一定的预备知识. 如果不打算仅仅停留在泛泛的一般性议论上，必须预设有更详尽一些的知识，起码要懂一般不变量理

论的基础. 因此我要从这样一些相关的讨论开始, 通过它们寻求保持我在这里的总体叙述的风格, 这样我能处处插入一些有关历史关联的评说. 与第一卷的叙述有一定的重复不可能完全避免, 可是材料的选择完全不同, 对人物的评论更是退居其次.

# 第一章

# 线性不变量理论的基本概念初步

## A　一般线性不变量理论概述

### §1　线性代换. 不变量的概念[1]

首先引进任意 $n$ 个量

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

作为原始变量 (Urvariable). 令它们经过一个幺模*的齐次线性代换

$$\begin{aligned} x_1 &= s_{11}x_1' + \cdots + s_{1n}x_n', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad\qquad |s_{ik}| = 1. \\ x_n &= s_{n1}x_1' + \cdots + s_{nn}x_n', \end{aligned} \tag{1}$$

首先, 如果下述变量序列

$$y_1, y_2, \cdots, y_n$$

或

$$z_1, z_2, \cdots, z_n \text{ 等等}$$

[1] 作为一册简明而又特别适合本书需要的教材, 我们推荐 Bôcher 的《高等代数引论》一书(最早的是英文版, New York 1907, 德文版, Leipzig, 1910 第一版, 1925 第二版). 此外, 我还要提及 *Sylvester* 全集的第一卷 (Cambridge 1904), 在该卷的第 198-202 页有一篇简短的注记, 采自 Cambridge 与 Dublin 数学杂志 IV (1851), 标题是 "论连带代数形式的一般理论", 其中第一次引进了 "不变量" 这个术语. 接下去在第 284 页上有一篇较长的, 可惜尚未全部完成的遗文,"论计算形式的原则" (Cambridge 与 Dublin 数学杂志 VII [1852]), 其中第一次出现了术语 "同步" 和 "逆步", 以及还有许多我们在今后要用到的其他术语. —— 编者注: 这期间新出版了 Weitzenböck 的不变量理论, Groningen 1922.

也都是随 $x$ 一起经同一代换 (1), 我们就称之为 "同步变量 (Kogredient)".

如果考虑一线性形式

$$u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_nx_n,$$

它在代换 (1) 下变成

$$u_1'x_1' + u_2'x_2' + \cdots + u_n'x_n',$$

由此就引出对 $x$ "逆步的 (kontragredient)" 变量序列. 办法就是, 将上述前一个线性形式中的 $x$ 用 (1) 式代换成 $x'$, 然后与后一个线性形式中的 $x'$ 逐个比较其系数, 我们就得到:

$$\begin{aligned} u_1' &= s_{11}u_1 + s_{21}u_2 + \cdots + s_{n1}u_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n' &= s_{1n}u_1 + s_{2n}u_2 + \cdots + s_{nn}u_n. \end{aligned} \tag{2}$$

这里新旧变量出现的位置与 (1) 式相反, 而且系数列表的横行和竖列互换了, 逆步性的本质正在于此. —— 显然, 代换 (1) 与 (2) 的这种相互关系是互为逆反的. 我们可以不从 $x$ 开始, 而同样好地从 $u$ (或者从任何一个与之同步的, 以后我们称其为 $v$ 或 $w$ ⋯⋯ 的变量序列) 来开始 (这就是对偶原理 (Prinzip der Dualität)).

由一些与 $x$ 或 $u$ 同类的变量序列我们还可以进一步组合出另一些变量序列, 它们由于有代换 (1) 或 (2), 也同样经过齐次线性 (幺模) 代换. 例如, 属于这种量的有: 二次项

$$x_1^2, 2x_1x_2, x_2^2, \cdots, x_n^2,$$

或者是由两个同步变量序列组成的双线性组合 (bilinearen Verbindungen):

$$x_1y_1, (x_1y_2 + x_2y_1), x_2y_2, \cdots, x_ny_n,$$

以及

$$(x_1y_2 - x_2y_1), (x_1y_3 - x_3y_1), \cdots, x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}.$$

我们把它们由于有 (1) 式和 (2) 式而经过的线性代换称之为由 (1) 式或 (2) 式所诱导出的 (*induziert*) 线性代换. 这些导出代换就不再必然是最一般的这类线性代换. 此外, 同步性和逆步性的概念也可以转移到它们的上面.

例如, 取一如下的二次型:

$$f(a, x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2,$$

并要求用 (1) 式把 $f(a, x)$ 变成 $f(a', x') = a_{11}'x_1'^2 + \cdots + a_{nn}'x_n'^2$, 则可证明,

$$a_{11}, a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{nn},$$

相对于

$$x_1^2, 2x_1x_2, x_2^2, \cdots, x_n^2$$

是逆步的. 这种二次型的一个特例就是一线性形式的平方:

$$(u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_nx_n)^2;$$

可以推断,

$$u_1^2, u_1u_2, u_2^2, \cdots, u_n^2$$

相对于

$$a_{11}, a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$$

为同步的. (请思考一下这个断言 (Ansatz) 的细节. 值得注意的是, $x_1^2, x_1x_2, \cdots$ 还有 $u_1^2, u_1u_2, \cdots$, 尽管它们不是相互独立的, 但它们仍然是线性无关的*.)

现在对任意 $N$ 个线性无关的量构成的每一整体, 只要经过 (1) 与 (2) 的齐次代换, 我们就随 Sylvester, 称之为一量丛 (*Komplex* (源自拉丁语 Plexus)[1] ). 一般线性不变量理论的目的, 在它们的奠基人的眼中看来, 就可以这样来表达: 提供出一些量丛. 人们就可以以最一般的方式用它们来构成一些表达式, 它们对其中单个量丛中的变量而言为有理, 整幂, 和齐次的多项式, 并且具有这样的性质, 它们在幺模代换 (1) 或 (2) 下不变.

由 $n$ 行同步变量构成的行列式, 如下所示者:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{vmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{vmatrix}$$

就提供了这样的最简单的例子, 通过简单地应用行列式的乘法定律就可以说明这一点. 但是理论的任务是, 而实际上也确就是, 将全部待求 "不变量" 的构造通过系统的算法归结到这种最简单的例子.

我们在这里不可能 —— 并且对后面的讲述也没必要 —— 对这个一般线性不变量理论梗概做更严格的描述. 更进一步的内容, 且其表述方式对以下的讲述也是非常合适的, 读者可以, 例如, 从 Hurwitz 在数学年鉴 (Math. Annalen), 第 45 卷 (1894) 上的论文中找到. 我们将只限于考察个别最简单的量丛及其相应的不变量, 并用它们来说明量丛的意义和我们所提出的问题的恰当性, 这应该就足够了.

作为 "量丛" 典型的例子, 我们首先来讨论 Graßmann 在他的线性延伸学 (lineale Ausdehnungslehre) (1844 年还有 1862 年) 中引进的几何量的*层次* (*Stufen geometrischer Größen*).

[1] 新近也称其为线性量 (*lineare Größe*). 参见 Weyl l.c. 205 页. (H.) (这里前面未引用过 Weyl 的著作, 疑系 Weitzenböck 之误. —— 中译者注)

## §2 Graßmann 层量

由 $n$ 行同步变量 $(x),(y),\cdots$，以及 $(u),(v),\cdots$，构成的行列式是一个不变量(因而自身也就成了一个量丛)，除此之外，我们也已把两行的行列式的总体当做量丛提出来了，这种行列式可以组成如下的矩形表格 (rechteckigen Schema)[1]

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{vmatrix}$$

我们自然也能用量 $u,v$ 来构成这种两行的行列式.

于是 Graßmann 的一般方法就是从总体上来考察量丛，它们可以由 $\mu$ 行同步变量 $(x),(y),\cdots$，或 $(u),(v),\cdots$ 构成，其中 $\mu$ 依据行的数目可分别取 $0,1,2,\cdots,(n-1)$.

如果我们暂时只从 $(x),(y),\cdots$ 出发，我们就将获得 $n$ *次层量*[2] 的下述序列:

$\mu=0$ 纯数量 (按 Graßmann 的说法)，与我们所说的不变量一致;

$\mu=1$ 就是 $n$ 个量 $x_i$ 自身;

$\mu=2$ $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个二阶子行列式 $(x_iy_k-x_ky_i)$ 形成的量丛;

$\mu=n-1$ 由 $(n-1)$ 个变量列 $(x),(y),\cdots$ 组成的 $n$ 个 $(n-1)$ 阶行列式.

由于我们已指出，$n$ 行的行列式是一个不变量，于此所列举的量丛序列到此循环结束.

同样，从那些 $(u),\cdots$ 出发，也可以得到 $n$ 次层量，它们与那些我们从 $(x)\cdots$ 所得到的层量之间的关系，还有待于澄清.

为了不使表述陷入太抽象，我们将用一个最简单的数字例子来做详细的讨论.

在 $n=2$ 时，自然我们还没有什么新东西.

对 $n=3$ 情况，我们指出，两行的行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

对下述逆步量

$$u_1,u_2,u_3,$$

[1] 以后将按习惯译为矩阵. —— 中译者注

[2] 这里得出的是层量这一点仍可由行列式乘法定理来证明，这个定理可以看成是全部不变量理论的真正基础. — Graßmann 层量是比较晚地才在不变量理论中明确地被提出，也就是由 Clebsch 于 1872 年提出的 (论不变量理论的一个基本问题, Göttinger Abhandlungen, 第 17 卷).

是同步相关的. 这是由于三行的行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

既然已是个不变量, 将它展成 $z$ 的如下的线性形式:

$$z_1(x_2y_3 - x_3y_2) + z_2(x_3y_1 - x_1y_3) + z_3(x_1y_2 - x_2y_1)$$

后, 就可以看出这一点. 同时我们还可以看出, 对任意的 $n$, 对 $(n-1)$ 行的行列式组成的量丛, 相应的定理也成立.

现在我们特别来研究 $n=4$ 这一情形 (它因为出现在现代物理的思维中, 对我们来说特别重要). 在 $\mu=0,1,2,3$ 这四种量丛中, $\mu=0,1,3$ 这三种可以说是已经解决了, 因此我们的注意力就转向 $\mu=2$ 这个情形.

我们令

$$p_{ik} = x_iy_k - y_ix_k \tag{3}$$

(因而有 $p_{ik}=-p_{ki}$). 通过将下述恒为零的行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}$$

按两行两列子行列式展开, 我们就可以得出下述表达式

$$P = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23}\text{[1]} \tag{3'}$$

取值为零的结论. 而在对 $x,y$ 作线性代换时 $p_{ik}$ 所经过的诱导代换因而也就必定会把方程 $P=0$ 变到自身. 事实上, 人们注意到 $p_{ik}$ 除了 $P=0$ 这个条件外, 不受别的条件的约束*. 从这里再往前推一步就可认识到, 任何与 $p_{ik}$ 同步的 (独立的) 量 $b_{ik}$ 所构成的下述表达式

$$B = b_{12}b_{34} + b_{13}b_{42} + b_{14}b_{23} \tag{4}$$

也是一个不变量. 我们要来详细论述这一步, 因为类似的思考在不变量理论中要经常用到[2], 它里面还包含一个中间结果, 是我们后面必须引用的.

[1] 关于求和项中的下标的记忆规则: 第一项的下标为 12; 34. 然后对末尾三个下标进行循环轮换而第一个下标保持 1 不变. (H.)

[2] 参看我们在前面提到的关于 $u_1^2, u_1u_2, \cdots$ 对 $a_{11}, a_{12}\cdots$ 为同步这一事实.

为此我们从下述四行四列的行列式出发:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix},$$

将它按下述二行二列的子行列式来展开:

$$p_{ik} = x_i y_k - y_i x_k, \quad p'_{ik} = z_i t_k - t_i z_k,$$

就得到

$$p_{12}p'_{34} + p_{34}p'_{12} + \cdots = \sum p'_{ik}\frac{\partial P}{\partial p_{ik}}. \tag{5}$$

已知 $p_{ik}$ 满足方程 $P=0$, 而且 $p'_{ik}$ 也满足 $P'=0$, 因而上述表达式 (5)—— 和我们的四行四列的行列式一样 —— 也是一个不变量. 可是我们相信, 方程 $P=0$, 以及 $P'=0$ 是不可约的 (*irreduzibel*), 即不可分解为 $p_{ik}$ 及 $p'_{ik}$ 的线性的因子. 但是不变量 (5) 式所含 $p_{ik}$ 及 $p'_{ik}$ 本身又都是线性的. 于是我们就得到这样的结论: 将方程 (5) 中 $p_{ik}$ 换成任意与之同步的量 $b_{ik}$ (与方程 $B=0$ 无关), 将 $p'_{ik}$ 同样地换成任意与之同步的量 $b'_{ik}$, (5) 式的不变量性质不会受到影响. 最后让我们把这些可以任选的 $b'_{ik}$ 选得与 $b_{ik}$ 一致, 于是我们就证明了表达式 $B$ 的不变性.

从这个简短描述的思路中可得出一个中间结果, 它源自同时线性依赖于 $p_{ik}$ 和 $p'_{ik}$ 的表达式 (5) 的不变性质. 这个结果是说, $p'_{ik}$ (从而 $p_{ik}$ 自身也是) 对 $\dfrac{\partial P}{\partial p_{ik}}$ 为逆步的, 详细地写出来就是

$$\begin{array}{cccccc} p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{34} & p_{42} & p_{23} \\ | & | & | & | & | & | \\ p_{34}, & p_{42}, & p_{23}, & p_{12}, & p_{13}, & p_{14}. \end{array}$$ 分别逆步于下述各量.

现在我们来研究由 $(u),(v),\cdots$ 构造出的 Graßmann 层量 (始终取 $n=4$). 既然我们已知 $(u),\cdots$ 本身与由量 $(x),(y),(z)$ 构成的三行三列的子行列式同步, 我们由对偶原理就可推出结论, 由 $(u),(v),(w)$ 构成的三行三列子行列式本身就与 $(x),\cdots$ 同步.

余下的就是要来研究二行二列的子行列式 $q_{ik}=u_iv_k-v_iu_k$ (它们自然满足方程 $Q=q_{12}q_{34}+\cdots=0$); 可以证明它们是与 $p_{ik}$ 逆步的变量. 这可以由下述和式

$$\sum_{i,k} p_{ik}q_{ik}$$

为不变量这一点导出. 实际上它等于

$$u_xv_y - v_xu_y$$

(这里 $u_x\cdots$ 是常用于代表 $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4$ 的缩写[1]), 因而完全由不变量构成.

将这一点再与我们所知道的关于 $p_{ik}$ 的自逆步性相结合我们就最终得到:

$$\begin{array}{rcccccc} & q_{12}, & q_{13}, & q_{14}, & q_{34}, & q_{42}, & q_{23} \\ & | & | & | & | & | & | \\ \text{分别同步于} & p_{34}, & p_{42}, & p_{23}, & p_{12}, & p_{13}, & p_{14}. \end{array}$$

总结: 那些可以由 $(u),(v),\cdots$ 通过构造行列式而导出的量丛, 除了有由 $(x),\cdots$ 得出的导出线性变换类型之外, 不会有别的线性变换类型.

上述基本定理, 我们在这里只对 $n=4$ 的情况作了证明, 在 Graßmann 的 1862 年版的延伸学的第 112 节中讨论了任意 $n$ 的许多具体形式. 我们将在此对它们加以说明 (仍然只对 $n=4$ 的情况), 并联系着我们到此为止的思路来加以证明.

我们从四组量丛 $(x),(y),(z),(t)$ 出发, 其行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix}$$

等于 1 . 就此 Graßmann 设想, 直接从下述矩形矩阵

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix}$$

的三行三列的子行列式来定义逆步变量组 $(u),(v)$, 并且断言, 由它们构成的 $q_{ik}$ 就等于对应的量 $p_{ik}=x_i'y_k'-y_i'x_k'$[2] $\left(\text{更准确地讲为 } q_{ik}=\dfrac{\partial P}{\partial p_{ik}}\right)$.

这基本上就是关于所谓伴随行列式 (adjungierte Determinanten) 的一个定理. 但是我们可以联系着先前的研究用另一种方式来处理; 我们证明它在一种特殊情形下成立, 通过适当的线性代换 (1), 可把一般的情形归结到这一特殊情形.

这就是, 令

$$\begin{aligned} (x)&=1,0,0,0, \quad (z)=0,0,1,0, \\ (y)&=0,1,0,0, \quad (t)=0,0,0,1. \end{aligned}$$

---

[1] 参见, 例如, 2 页脚注所引之 Weitzenböck. 在此注意不要把它与缩写 $u_x=\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 弄混了.

[2] 原文如此, 各 $x,y$ 右上角的一撇疑有误. —— 中译者注

于是必有

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

由观察上述列表中的头两行得知, 除了 $p_{12} = 1$ 以外, 所有的 $p_{ik}$ 均为零, 其次观察头三行或 1.,2.,4. 诸行, 可知 $(u)$ 或 $(v)$ 的值如下:

$$(u) = 0, 0, 0, 1, \quad (v) = 0, 0, -1, 0;$$

再由此又得到, 除 $q_{34} = 1$ 以外, 所有 $q_{ik} = 0$. 因而实际上在这个特殊情况下有下述方程

$$q_{ik} = \frac{\partial P}{\partial p_{ik}}; \tag{6}$$

我们的结论是, 它们因此也就必在 (由 Graßmann 所考察的) 一般情形中成立. 这是因为 $q_{ik}$ 在任意的代换 (1) 下与 $\frac{\partial P}{\partial p_{ik}}$ 同步, 而通过一般的代换就可以从我们的特殊情形生成一般的情形*.

## §3 关于我们的量丛 (特别是 Graßmann 层量) 的几何意义

那些在不变量理论中经过齐次线性代换的量系 (Größensysteme) (量丛 (Komplexe)) 按照一个可能要追溯到 Salmon, 或者还有 Hesse 的教科书中的传统[1], 通常都用这样的方式来做几何诠释, 即人们只给它们的分量的比例以几何意义. 因而 (仍只讨论 $n = 4$ 的情形): 将 $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ 看成是三维空间中的所谓齐次点坐标 (Punktkoordinat), 将 $u_1 : u_2 : u_3 : u_4$ 看成也是这种的平面坐标 (Ebenenkoordinat), 而把 $p_{ik}$ 的比例看成是直线坐标 (Linienkoordinat)* 等等. 那么线性代换 (1) 就是 $R_3$ 的直射变换 (Kollineation), 而与其代数的部分相关的几何内容就是射影几何.

这一几何诠释是如此富有成果 (而射影几何作为一门独立的学科出现又是如此重要), 所以它还要剥去不变量理论的与之不同的一些细微的本质差异. 因为它本身绝不是不变量, 而只不过是对它等于零的解释. 例如 $u_x = 0$ 给出点与平面的 "连在一起的位置", 但 $u_x$ 自身仍没有适当的意义. 又如行列式 $|x\ y\ z\ t|$ 通过其为零给出了四个点在一平面上的条件, 但它本身却与这种解释无缘.

与此相反, 看来适当的做法还是 (而且恰好是直接由我们计划作的物理应用所提供) 回归到朴素的解释, 而这也是 Graßmann 延伸学的基础, 这就是, 把 $x_1, x_2, x_3,$

[1] 参见第一卷, 159–164 页. (中译本第 131–136 页.)

$x_4$ 理解为四维空间中的一个点的平行坐标. 于是代换 (1) 就给出 $R_4$ 在保持坐标原点 $O$ 不变时的仿射变换; 为此我们也可以把 $x_1, x_2, x_3, x_4$ 理解为由点 $O$ 伸到点 $(x)$ 的线段的坐标. 但行列式 $|x\ y\ z\ t|$ 则表示由 $O$ 点出发指向点 $(x), (y), (z), (t)$ 的四条线段确定的平行多面体的体积. 相应地得知, 下述矩阵

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}$$

的两行两列的行列式, 或下述

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

的三行三列的行列式的几何意义就是一个以 $O$ 为顶点的平行四边形, 或平行四面体的各个侧面的面积.

通过固定 $O$, 我们就进入了 $R_4$ 的仿射几何的领域内了, 为了在 $n = 4$ 的情形下获得整个不变量理论方法一个适当的概念, 我们只要对这个几何的形象思维方式加以论述. 在这一几何中我们不能谈球或直角, 即度量几何中的那些精确的性质: 总之, 一联系到二次型就会出的这种问题 (因而用 Graßmann 的话来说就是当我们从线性延伸学进入到完全的延伸学时就如此). 但是空间的容积的各个分量还是可以作精确的研究的. 我们取 $p_{ik}$, 也就是下述矩阵的子行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix},$$

根据行列式计算的基本定理, 当且仅当它们用下式

$$\kappa \cdot (x) + \lambda \cdot (y), \quad \mu \cdot (x) + \nu \cdot (y),$$

来替换 $(x)$ 和 $(y)$, 且假设有 $\begin{vmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{vmatrix} = 1$ 时, 它们才会全部不变. 用 Sylvester 的不变量理论的术语来讲就是: 它们是 $(x), (y)$ 的组合体 (*Kombinanten*). 这在几何上就是说, 在一平面内的平行四边形 $O, (x), (y)$ 不能由它的分量来唯一决定, 而是可以以一定的方式 (也就是其一个顶点总是位于 $O$ 点) 加以改变. 对于高阶的层量相应的结果也成立.

不变量理论的这一 "仿射的" 意义和 "射影的" 意义自然不是在原则上对立的, 而是在几何上 —— 通过所谓投影与相交原理 —— 可以相互推导. $R_3$ 中的射影意义可以由 $R_4$ 中的仿射意义得出, 这就是, 将在 $R_4$ 中从 $O$ 出发的图形仍然从 $O$ 出发投影到位于 $R_4$ 中任一个 $R_3$ 上去. 由此得出, $R_4$ 中由 $O$ 发出的一条线段投影

成 $R_3$ 中的一个点, 由 $O$ 发出的一个二维的线性形体 (lineare Gebilde) 就变成了 $R_3$ 中的一条直线, 由此类推. 最后, 我们还可以这样来说明在 $R_3$ 中的意义, 即它也给出解析展开表达式的一个完整的图像. 我们最好还是回到一个特别的解释, 它是 Möbius 在其重心计算 (1827)[1] 时对齐次坐标给出的. 我们把 $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$ 解释为在 $R_3$ 中一个点的通常的平行坐标, 并把 $x_4$ 称之为它的重量. 特别地令 $x_4 = 1$, 则此时的 $p_{ik}$ 就是 $R_3$ 中线段 (Linienteil) 的要件 (Bestimmungsstücke), 三行三列的行列式就是平面块 (Ebeneteile) 的要件; 而四行四列的行列式则给出一空间块 (Raumteil). 这种对 Graßmann 的层量的解释也就是我曾在第一卷, 第 4 章讲过的, 也是我在初等几何讲义 (1908 年)[2] 的第二部用作开讲的例子中所讲过的; 它在刚体力学中非常有用.

同一解析方法, 随人们所奉行的观点的不同, 会有各种合理的解释. 1831 年 Plücker 在他的《解析几何的发展》一书第二卷的前言中所表述的观点仍然有效, 他在其中写道:

"我愿说我信奉这样的观点, 即分析学是一门科学, 它与应用无关, 独立存在, 而几何, 好像是来自力学的另一个侧面, 完全是以从巨大宏伟的整体中得出一定关系的这种建构性思想的面貌出现."

在下面我们将把这一段至理名言尽可能向前推进, 正如对我们来讲, 除了力学, 还要进入到范围广泛的整个数学物理. 在这样做的时候, 如果我们用射影几何中的例子来说话, 就会省去许多麻烦, 物理学家也经常是这样, 说得确切些, 他们直接把这些翻译成他们的语言. 当然这不是前提条件; 但我仍将在个别的地方就此加以说明.

## §4 二次型及其不变量

关于线性型 $u_x$ 我们在 §1 中已经讲得够多了, 现在我们要来谈二次型

$$f_{xx} = \sum_{(i,k)}\sum a_{ik}x_ix_k = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \cdots (a_{ik} = a_{ki}) \tag{7}$$

我们已经指出过, 这里的

$$a_{11}, a_{12}, a_{22} \cdots$$

必须理解为逆步于下述各量:

$$x_1^2, 2x_1x_2, x_2^2 \cdots$$

也就是在我们给出 $f$ 时, 我们就把这些量 $a_{11}, a_{12}, a_{22}, \cdots$ 的量丛添加到我们的其

[1] 全集, 第 1 卷, 1885.

[2] 从高观点看初等数学. 第 II 卷, 几何学. 第二版, Berlin(柏林), 1925.

他量丛 —— 加入到 $(x)$, 加入到 $(u)$, 加入到那些 Graßmann 层量 —— 之中, 并把它看成是最简单的新不变量置于如此扩充了的 $f$ 系之首.

为了与已知的事情相联系, 我们要回顾一下 $f$ 在 $n=3$ 和 $n-4$ 的几何意义:

在射影几何的意义下, $f=0$ 在 $n=3$ 时表示一圆锥曲线, $n=4$ 时表示一个二次曲面.

在仿射几何的意义下, 为了直观起见, 我们来考察方程 $f=\text{const}$, 这时在 $n=3$ 时得到就是一族形状相似, 位置也相似的二次曲面, 它们围绕着 $O$, 以 $O$ 为中心, 位置全都与同一 "圆锥" $f=0$ 内接. $n=4$ 时就是在 $R_4$ 中有类似的情况.

现在只要一个简单的步骤我们就已可以得到关于 $f$ 的双线性不变量的相关结论 (由于我们只讨论 $n=3$ 的情形), 它在射影几何的意义下, 给出的是关于圆锥曲线 $f=0$ 的 "极式关系 (*Polarenverwandtschaft*)", 而在仿射几何的意义下, 对于 $f=\text{const}$, 这个二次曲面给出的是 "直径与共轭对径平面 (Durchmesser und konjugierte Diametralebene)" 之间的关系. 将在 $f$ 中的 $(x)$ 换成与其同步的变量 $\lambda\cdot(x)+\mu\cdot(y)$. 然后按 $\lambda,\mu$ 的幂次排序就得到

$$\lambda^2 f_{xx}+2\lambda\mu f_{xy}+\mu^2 f_{yy},$$

其中我们用了下述缩写

$$\sum_{(i,k)}\sum a_{ik}x_i y_k=f_{xy}; \tag{7'}$$

这些与 $\lambda^2,2\lambda\mu,\mu^2$ 相乘的项必定是不变量. 在代数学中人们通常把这些双线性不变量 $f_{xy}$ 称之为 $f$ 的极式 (*Polare*).

在 $f_{xy}$ 中线性地出现的 $y_k$ 的系数必定与这些 $(y)$ 逆步. 因此我们可以令它等于量 $u_k$, 即有

$$\begin{aligned} u_1&=\sum_k a_{k1}x_k,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ u_n&=\sum_k a_{kn}x_k. \end{aligned} \tag{8}$$

通常我们把这些公式称为 (与射影几何的意义相对应的) 属于 $f$ 的极式关系 (Polarenverwandtschaft).

通过构造行列式可以得到 $f$ 的更多的简单不变量.

对此我们有两种方式来构造:

或者首先考察系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}, \tag{9}$$

接着在它的后面构造一系列的行列式, 即, 如艺术用语的说法, 用量 $u$, 或, 量 $u$ 与 $v$ 等等对 $D$ 加以 "镶边" 而成的:

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & u_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & u_n \\ u_1 & \cdots & u_n & 0 \end{vmatrix}, \quad D'' = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & u_1 & v_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & u_n & v_n \\ u_1 & \cdots & u_n & 0 & 0 \\ v_1 & \cdots & v_n & 0 & 0 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

显然我们这样就得到了关于 $u_i$ 和 $u_iv_k - v_iu_k$ 的二次型, 其系数就是 $D$ 的子行列式.

或者, 从我们刚刚用过的极式构成法开始, 即将 $f$ 中的 $(x)$ 依次换成 $\lambda(x) + \mu(y), \lambda(x) + \mu(y) + \nu(z), \cdots$. 这样首先就得到了下述表达式:

$$\lambda^2 f_{xx} + 2\lambda\mu f_{xy} + \mu^2 f_{yy},$$
$$\lambda^2 f_{xx} + 2\lambda\mu f_{xy} + \mu^2 f_{yy} + 2\lambda\nu f_{xz} + 2\mu\nu f_{yz} + \nu^2 f_{zz}, \text{ 等等},$$

它们是 $\lambda, \mu$ 的, 以及 $\lambda, \mu, \nu$ 的二次型. 这时再用这些二次型来构造行列式, 我们就会得到一系列的表达式, 我把它称作为 $f', f''$:

$$f' = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} \quad f'' = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix} \text{ 等等}. \tag{11}$$

从它们的构造就很清楚, 它们是不变量, —— 它们根本就是完全由不变量构成的. 相反倒是要一定的思考[1] 才能认识到, 它涉及逐级 Graßmann 量 $x_iy_k - y_ix_k$, 等等的二次型, 它们的系数仍然是 $D$ 的子行列式.

现在结果就是这样, 只要我们把那些由 $(x), (y), \cdots$ 导出的层量按 §3 所述的 Graßmann 定理换成 $(u), (v), \cdots$ 的互补层量 (*komplementären Stufengößen*), 那么按逆向顺序提取的 $f, f', f'', \cdots, f^{(n)}$ 就与在其前加上交替变化的符号的 $D, -D', +D'', -D''', \cdots$ 相一致.

我们不对此作一般的证明, 这会把我们带到太远, 我们想用一个例子来对它进行验证, 这个例子我们将在第二章中经常用到, 它就是四个变量的二次型:

$$f = k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + k_3x_3^2 + k_4x_4^2.$$

[1] 即, 最终也就不过是反复应用行列式乘法定理.

我们有

$$\begin{aligned}
+D &= k_1k_2k_3k_4, \\
-D' &= k_1k_2k_3u_4^2 + \cdots, \\
+D'' &= k_1k_2(u_3v_4 - v_3u_4)^2 + \cdots, \\
-D''' &= k_1\begin{vmatrix} u_2 & u_3 & u_4 \\ v_2 & v_3 & v_4 \\ w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix}^2 + \cdots,
\end{aligned} \tag{12}$$

而另一方面有:

$$\begin{aligned}
f &= k_1x_1^2 + \cdots, \\
f' &= k_1k_2(x_1y_2 - x_2y_1)^2 + \cdots, \\
f'' &= k_1k_2k_3\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}^2 + \cdots, \\
f''' &= k_1k_2k_3k_4\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix}^2 + \cdots,
\end{aligned} \tag{12'}$$

这与我们的判断是一致的*.

射影几何学家熟知这一构造方法. 如果 $f = 0$ 是某一个二次曲面在点坐标 (Punktkoordinaten) 中的方程, 则 $f' = 0$ 就是它在直线坐标系 (Linienkoordinaten) 中的方程, $f'' = 0$ 是它在平面坐标系 (Ebenenkoordinaten) 中的方程, 依次类推.

Cayley 和 Sylvester 早就对任意 $n$, 以一般的方式提出了这里所构造的这些 $f$ 的不变量. 但是一些特殊情况还可以追溯得更早, 例如在 Gauß 的 Disquisitiones Arithmeticae (算术研究) 中就已经有了 $n = 3$ 时的行列式 $D'$ (1801), 在那里 (第 267 节) 他把它称之为 "forma adjuncta (伴随形式)"[1] .

为了后面的讲述我们还要指出, 在四个变量的情形下建立 $f$ 的基础*时就已经知道了以 $x_iy_k - x_ky_i = p_{ik}$ 为变量的二次不变量. 即在此前的

$$P = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} \tag{13}$$

以及现在的

$$\sum k_ik_k \cdot p_{ik}^2. \tag{13'}$$

[1] 全集, 第一卷, 301 页.

## §5 关于二次型的等价

所有不变量理论的真正的目标就是解决等价问题, 即对任意给定的几个量丛, 在此就是指两个二次型, 是否能够通过原始变量的线性代换, 或通过与它们一起给定的导出代换来相互转化. 为此要将等价区分为不同的等级, 这就是, 我们首先不考虑要求代换行列式等于 1 这个约束条件, 然后再把这个条件引进来, 再后也许加上代换系数的值为实数这个限制, 或者, 最后和在数论中那样, 设定它们全为实整数, 等等.

在下面我们首先以最一般的意义来理解等价性, 这样就可以对二次型的等价性作出准确的断言. 为此我们还要对单个的二次型引进一个特征属性, 按照 Frobenius 引进的表达术语, 我们把它称作为秩(*Rang*). 当在不定元 $x, y, \cdots$ 的函数序列 $f, f', f'', \cdots$ 中, 只有 $f$ 不为零, 而 $f'$ 和后面所有的函数恒为零 (因而也就是当由 $f$ 的系数矩阵组成的所有两行两列的子行列式为零, 从而三行三列的子行列式也都为零) 时, 秩等于 1. 秩等于 2 的情况是, $f$ 和 $f'$ 异于零, 但 $f''$ 及其后全部函数均为零, 依次类推. 最后如系数行列式自身 $\neq 0$, 则秩为 $n$.

这里我们是以下述定理为前提的:

两个二次型当且仅当它们有同一秩时才 (在一般意义下) 等价.

秩的相等为等价的必要条件这一点, 只要我们想到, $a_{ik}$ 的两行两列的, 三行三列的, $\cdots\cdots$ 子行列式, 在 $(x)$ 的线性代换下, 它们每一个也都经过齐次线性代换 (因为它们每一个本身就都是一个 "量丛"), 就立即可以认识到.

但这个判据也是充分的这一点就要用到对所给二次型的一个变换, 这个变换要追溯到 Jacobi[1], 并为形式打造一个正则的构形, 这种构形仅由秩 $r$ 唯一决定.

为了将所有的情况都包括进来, 首先我们把所给的形式通过一个辅助变换变成这样的一个形式, 使得下述列表

$$\left|\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right|$$

[1] 见他遗留的一篇论文 "论关于对两个变量系的每一个均为线性, 齐次的表达式的一个初等变换", 载 Crelles Journal 53 (1857) = 全集, 第 3 卷. 顺便提一下, Jacobi 在该文中只讨论了所谓 "普遍的" 情形, 其中 $r = n$. (或者这样说更好: 我们把 $a_{ik}$ 看成是不定量, 可以自由变动). 这与他的整体描述有关 —— 与 Gauß 给出的范例不同 —— 他没有时间来处理个别的情形. Jacobi 的这种做法对数学家们在一个长时间内都有影响; 在 Cayley 和 Sylvester 他们那里也经常只是偶尔引入一些特例. 只是等到新的柏林学派 (在 Weierstraß 和 Kronecker 影响下) 才重新回归到 Gauß 表述的精确性. 自然二者各有其优点; 这说起来话长. 一种更能表现形式思想 (它首先力求一个概观), 而另一种则更能表现具体的思想 (它考虑的是个别的应用).

中 (左上角的) 前 $r$ 个那些带框的子行列式都不为零. 这一可能性通过 $f=0$ 的射影几何意义可以很容易地看出. $a_{11}\neq 0$ 这一点就是说, 坐标系的第一个角点不在 $f=0$ 上; 而 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$ 就是说, 坐标系中从此角点发出的坐标轴线不与 $f=0$ 相切, 等等.

这一设定使我们能将 $f$ 变成以下的形式

$$\begin{aligned} f &= \frac{(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n)^2}{a_{11}}+f_1(x_2,\cdots,x_n) \\ &= \frac{y_1^2}{a_{11}}+f_1(x_2,\cdots,x_n), \end{aligned}$$

其中在 $f_1$ 里面已经不再有 $x_1$ 了. $f_1$ 中的第一项其实就是

$$\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{a_{11}}x_2^2,$$

而其他的系数和上面的一样, 也是由 $a_{ik}$ 组成的两行两列的行列式除以 $a_{11}$ 得出.

现在我们就从相应的 $f_1$ 继续下去, 再把含 $x_2$ 的项提取出来. 如此继续做下去, 直至这个做法到 $r$ 步后自行中断为止. 最后我们就得到一个 $r$ 项的和

$$f=\frac{y_1^2}{a_{11}}+\frac{y_2^2}{a_{11}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}+\frac{y_3^2}{a_{11}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}+\cdots. \tag{14}$$

在此我们再令

$$\frac{y_1}{\sqrt{a_{11}}}=z_1, \frac{y_2}{\sqrt{a_{11}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}}=z_2,\cdots, \tag{14a}$$

从而将 $f$ 变成了如下的形式

$$f=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_r^2. \tag{15}$$

它实际上只依赖于 $r$, 因为 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 仅仅就是 $x_1,\cdots,x_n$ 的线性无关的函数而已, 因而相对于其行列式为任意值的线性变换, 并无什么个性可言.

但是我们在前面提出的一般形式的等价问题由此就得到了解决. 在 $r=n$ 时的 Jacobi 变换, 在射影几何的意义下不是别的, 不过就是圆锥曲线与极三角形 (Polardreieck) 的关系, 二次曲面与配极四面体 (Polartetraeder) 的关系 —— 而在仿射几何的意义下就相当于引进了一个共轭直径系 (System Konjugierter Durchmesser).

但是形式按秩的分类相当于 (仍在 $n = 4$ 以及射影几何的意义下), 将二次曲面分类为真二次曲面, 锥面, 平面偶 (Ebenenpaar) 和二重平面 (Doppelebene).

于是就会自然地提出进一步的问题: 公式 (14a) 有可能包含虚的平方根. 如果我们从头到尾仅限于实的代换, 这个时候 $f$ 的标准形式以及其等价问题将会如何呢?

在这种情况下, (14) 式的系数将分成正的系数和负的系数两种, 并且, 在将正的项放在前面时, 可缩写成

$$f = k_1^2 y_1^2 + \cdots + k_s^2 y_s^2 - k_{s+1}^2 y_{s+1}^2 - \cdots - k_r^2 y_r^2.$$

在此我们再令

$$k_1 y_1 = z_1, \cdots, k_s y_s = z_s, k_{s+1} y_{s+1} = t_1, \cdots, k_r y_r = t_{r-s},$$

于是借助于实的代换就得

$$f = z_1^2 + \cdots + z_s^2 - t_1^2 - \cdots - t_{r-s}^2. \text{[1]} \tag{16}$$

为了获得这一实的标准形式 (Normalform), 我们能用许多不同的方式导出这个约化过程 (它被我们藏在辅助变换的背后去了, 我们就是靠它达到 $a_{11} \neq 0, a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$ 等等的目的). 而且在此有一个十分简单的定理, 这个定理 Sylvester 在 Philos. Magazine (哲学杂志) (1852), 第 4 卷 (= 全集第 I 卷, 381 页) 中命名为二次型的惯性律而为众所周知, 也可在后来发表的, Jacobi 的一篇论文 (Crelles Journal **53** (1857) = 全集第 III 卷, 591 页) 中找到. 还可在 Riemann 的遗著中找到, 这可能是 Riemann 在 1846/1847 年听 Gauß 关于最小二乘法的讲座时产生的成果. 全集, 补遗 (1902), 59 页.

这个定理是说:

*一给定的 $f$ 所具有的正平方项的个数 $s$ (从而其负平方项的个数 $r-s$) 始终是相同的, 这样通过实线性变换总能把它变成 (16) 的形式.*

其证明可以很简单地间接推出. 为此我们仍想采用几何的语言, 但这回是与仿射几何的意义相联系 (因为这里要谈的是 $f$ 自身的正负号).

假设通过第二种约化手续把 $f$ 变成如下的形状:

$$f = \varsigma_1^2 + \cdots + \varsigma_\sigma^2 - \tau_1^2 - \cdots - \tau_{r-\sigma}^2.$$

---

[1] 负号的个数显然等于下述数列中出现的符号交替的个数:

$$+1, a_{11}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \cdots, \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}.$$

这里的 $\varsigma_1,\cdots,\varsigma_\sigma,\tau_1,\cdots,\tau_{r-\sigma}$ 应该与 (16) 中的 $z_1,\cdots z_s,t_1,\cdots,t_{r-s}$ 完全一样, 是原始的 $x_1,\cdots,x_n$ 的线性无关的组合. 这就是说, 下述方程组

$$\varsigma_1=0,\cdots,\varsigma_\sigma=0,\tau_1=0,\cdots,\tau_{r-\sigma}=0$$

在 $x_1,\cdots,x_n$ 的空间 $R_n$ 中所确定的线性子流形, 其维数与由方程

$$z_1=0,\cdots,z_s=0,t_1=0,\cdots,t_{r-s}=0$$

所确定的线性子流形的维数完全相同, 即 $(n-r)$.

我们令这样得到的 $f$ 的两个表达式相等, 并将所有的负项移到等式的另一侧, 得下述恒等方程:

$$z_1^2+\cdots+z_s^2+\tau_1^2+\cdots+\tau_{r-\sigma}^2=\varsigma_1^2+\cdots+\varsigma_\sigma^2+t_1^2+\cdots+t_{r-s}^2.$$

上式中等式左侧平方项数为 $(r+s-\sigma)$, 而右侧平方项数为 $(r-s+\sigma)$. 如果这两个数不相等, 则这两个中有一个小的, 例如设为 $(r-s+\sigma)$, 因而有 $(s-\sigma)>0$. 方程组: $\varsigma_1=0,\cdots,\varsigma_\sigma=0,t_1=0,\cdots,t_{r-s}=0$ 共同确定了 $x_1,\cdots,x_n$ 的空间 $R_n$ 中的一个实线性流形, 其维数至少为 $(n-r+s-\sigma)$. 因为上述恒等式中全是实数量的平方, 所以在这个流形上, $z_1,\cdots,z_s,\tau_1,\cdots,\tau_{r-\sigma}$ 也都全为零. 因而 $z_1,\cdots,z_s,t_1,\cdots,t_{r-s}$ (仅限于这些量) 必定在某个维数至少为 $(n-r+s-\sigma)$ 的线性流形上为零, 而它们此前还只是在一维数为 $(n-r)$ 的流形上为零! —— 由此可见, 如果不取 $s=\sigma$ 就会出现矛盾; 这就是我们要证明的.

因而相对于其行列式不为零的实线性代换, $n$ 个变量的二次型就分解为多种类型, 其数量由满足下述不等式:

$$1\leqslant r\leqslant n,\quad 0\leqslant s\leqslant r$$

的数偶 $r,s$ 所确定. 于是在 $n=4$ 时我们得到下述 $\dfrac{n(n+3)}{2}=14$ 种类型, 其标准型式为:

秩 $r=1$: 标准形式 $z_1^2$ 或 $-t_1^2$,

秩 $r=2$: 标准形式 $z_1^2+z_2^2, z_1^2-t_1^2, -t_1^2-t_2^2$,

秩 $r=3$: 标准形式 $z_1^2+z_2^2+z_3^2, z_1^2+z_2^2-t_1^2, z_1^2-t_1^2-t_2^2, -t_1^2-t_2^2-t_3^2$,

秩 $r=4$: 标准形式 $z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2,\cdots$ 直至 $-t_1^2-t_2^2-t_3^2-t_4^2$.

根据 Gauß 的先行工作 (算术研究 §271)[1], 我们把那些能写成下述形式的二次型:

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2,\quad 或\quad -t_1^2-t_2^2-t_3^2-t_4^2$$

[1] 全集第 1 卷, 305 页.

称之为正定的或负定的, 因为在 $x_1, \cdots, x_4$ 的实值不全为零时它们只能取正值或负值. 秩数较低的二次型, 其标准形式仅含正号或仅含负号时我们习惯于把它们称之为半定的; 如果它不为零, 则对不全为零的 $x_1, \cdots, x_4$ 也有确定的符号, 但是对不全为零的 $x_1, \cdots, x_4$, 它甚至还可以为零. 此外我们还一般地把正平方的个数叫做惯性指数 (*Trägheitsindex*).

在射影几何的意义下, 实形式的这一完全分类会产生混淆, 或者更好地说是, 纠缠到一起了, 因为 $f=0$ 所表示的曲面与 $-f=0$ 所表示的曲面是一样的. 于是我们得到下表:

秩 1. 一种情形: 二重平面.

秩 2. 两种情形: 虚的或实的平面偶.

秩 3. 两种情形: 虚的或实的圆锥.

秩 4. 三种情形: 虚曲面, 没有实直线的实曲面, 有实直线的实曲面.

这样的得到的关于二次型及二次曲面的分类, 单独来看, 虽然非常漂亮和有用, 但是尽管如此, 把系数本身看成是变量来思考的这个连续性思想的问题仍悬而未决*. 这样, 例如, $z_1^2+z_2^2+z_3^2$ 就好像是 $z_1^2+z_2^2+z_3^2 \pm \varepsilon z_4^2=0$[1] 在 $\varepsilon=0$ 时的极限情形, 从而可以看成是

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2 \quad \text{和} \quad z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_4^2$$

这两个形式之间的一个过渡情形. 稍后我们还要利用这一点.

## §6 由一个二次型确定仿射度量

如果我们将初等度量几何的概念体系转移到 $R_n$ 上, 则明显的是, 由一点 $(x)$ 到原点 $O$ 的距离由 $\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$ 来定义, 而由 $O$ 发出的两线段 $(x),(y)$ 之间的夹角则由

$$\arccos \frac{x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}}$$

来定义. 实际上 Graßmann 在他的延伸学 (1862) 的第二版中就已经这样做了, 而且他还理所当然地以 $R_3$ 中绕 $O$ 点的初等几何转动作类比, 考察了 $x$ 的那些把 $\sum x_i^2$ 变到自身且行列式等于 1 的齐次线性代换[2]. 正是通过这一点他的 “线性” 延伸学 (到此为止我们谈的还只是它) 才转化为他的 “完全的” 延伸学. 由于所有这些规定, 我们的研究就只要围绕着如何引进一正定二次型 $\left(\text{也就是 } \sum x_i^2\right)$ 及其不变量理论, 即不改变二次型的代换. 特别是, 两个方向相互垂直通过极式等于零:

[1] 原文如此, 疑系 $z_1^2+z_2^2+z_3^2 \pm \varepsilon z_4^2$ 之误. —— 中译者注

[2] Graßmann 把 “绕 $O$ 点的转动” 说成是 “旋转变化 (zirkulärer Änderung)”.

$\sum x_i y_i = 0$ 来给出. 但极式关系 (8) 取下述简单的形式:

$$u_i = x_i.$$

因而对于几何研究来说, 不仅对每一个量组 $(x)$ 有一个 $(u)$ 与它相对应, 反之亦然. 而且对每一由下述矩阵

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

组成的行列式的量丛, 也有一个由下述矩阵

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

组成的行列式与之对应. Graßmann 把这称之为从一基本形体 (Grundgebilde) 到它的 "互补形体" 的过渡.

我们把正定二次型一样地纳入标准形式 $\sum x_i^2$, 这样做自然只不过是建立一个特别简单的 ("处处直交的") 坐标系.

从这样得到的观点出发显然就要寻求 $R_n$ 中的度量几何的这样一种推广, 就是以任一行列式不为零的二次型, $\sum a_{ik} x_i x_k$, 来代替 $\sum x_i^2$ 作基础. 要求行列式不为零, 从而极式关系 (8)

$$u_i = \sum a_{ik} x_k$$

是单值可逆的 (行列式为零的情况随后可解释为极限情形). 此外, 从 $O$ 发出的两个方向的夹角为

$$\arccos \frac{\sum a_{ik} x_i y_k}{\sqrt{\sum a_{ik} x_i x_k} \sqrt{\sum a_{ik} y_i y_k}},$$

而每一个行列式等于 $+1$、并把 $\sum a_{ik} x_i x_k$ 变到自身的线性代换, 就是绕 $O$ 点的转动, 等等.

这可是一般的仿射度量 (affine Maßbestimung), 首先我们就要按它的结构加以区分, 看看 $\sum a_{ik} x_i x_k$, 还有 $\pm \sum a_{ik} x_i x_k$, 它的符号组合在惯性定律的意义下属于哪一种. 在此所出现的关系举例如下: 如果 $\sum a_{ik} x_i x_k$ 不是恰好为一确定二次型, 则在它的极平面内有实方向, 反之亦然.

从另一方面来看, 即用 $R_{n-1}$ 中射影几何的观点来解释, 这一方法与我们在第一卷第 4 章详细解说过的, 由 Cayley 在 1859 年提出的射影度量是一致的. 由此表

明 (正如我自己在 1871/1872 年仔细证明了的), 这里包括了两种非欧几何, 人们习惯把它们分别称为 Riemann 几何和 Bolyai–Lobatscheffsky 几何, 分别对应于其二次型 $f$ 是确定的, 或者是不定的.

## §7 关于含同步变量的双线性型和含逆步变量的双线性型

双线性型是这样一种形式, 它对两列变量都是线性 (和齐次) 的. 在此还要区分, 这两列变量是同步的, 还是逆步的. 在第一种情况下, 我们把这两列变量记为 $(x)$ 和 $(y)$, 而在第二种情况下记为 $(x)$ 和 $(u)$, 因而我们要把形式

$$\sum a_{ik}y_ix_k \text{ 以及另一个 } \sum \alpha_{ik}u_ix_k$$

摆在首位.

### 1. 同步变量

在此我们还要区分两种子情形 (在 $(x)$ 和 $(y)$ 的同步变换下它们实际上是分开并立的), 这就是系数 $a_{ik}$ 的矩阵或者是对称的 $(a_{ik} = a_{ki})$, 或者是反对称的* $(a_{ik} = -a_{ki}; a_{ii} = 0)$ 这两种情况. 在后一种情况下, 为明显起见, 我们不写 $a_{ik}$, 而宁愿写成 $\lambda_{ik}$.

含同步变量的对称双线性型不是别的, 只不过是二次型 $\sum a_{ik}x_ix_k$ 的极式, 因而已经在前面讨论过了.

相反, *反对称的* (*antisymmetrische*) 或者说的*交错的* (*alternierende*) 双线性型

$$\sum \lambda_{ik}y_ix_k \tag{17}$$

则提供了一些本质上是新的东西. 大约在 100 年前数学家就在所谓 *Pfaff* 问题中碰到过它[1], 我在这里不打算完全照历史的顺序叙事, 这样可以说它所要研究的问题就是将下述类型的微分式

$$\Xi_1 d\xi_1 + \Xi_2 d\xi_2 + \cdots + \Xi_n d\xi_n$$

(其中 $\Xi$ 是 $\xi$ 的函数) 进行分类. 人们发现, 要把下述表达式

$$\sum\sum\left(\frac{\partial\Xi_i}{\partial\xi_k} - \frac{\partial\Xi_k}{\partial\xi_i}\right) d\xi_i\delta\xi_k$$

放到首位 (这里 $d\xi_i, \delta\xi_k$ 理解为变量的任意小的改变). 因此我们就得到了 (把 $d\xi_i, \delta\xi_i$ 类比于我们的 $(x), (y)$) 一个含同步变量的反对称双线性型, 并且因此把在对我们的

[1] 柏林科学院院刊 1814 — 1815: Joh. Friedr. Pfaff: Methodus generalis, aequationes Differentiales ··· complete integrandi. (一般方法, 微分方程 ······ 完全积分.)

双线性型 (17) 作 (纯代数的) 研究时要讨论到的主要不变量还总是称之为 *Pfaff* 数组 (*Pfaffsche Aggregat*, 英文为 *Pfaffian*). 当然是后来 Jacobi 和 Cayley 在两篇年轻时的论文[1] 中才把这一数组的代数性质搞清楚的.

上述 Pfaff 数组 $\Lambda$ 只对偶数 $n$ 才存在. 它们是双线性型的系数 $\lambda_{ik}$ 的 $\frac{n}{2}$ 次有理齐次整函数, 在引进下述记号

$$\Lambda = (1, 2, \cdots, n) \text{ 对 } (i, k) = \lambda_{ik} \tag{18a}$$

后, 它们就遵守如下的递归公式:

$$(1, 2, \cdots, n) = (1, 2)(3, 4, \cdots, n) + (1, 3)(4, \cdots, n, 2) + \cdots + (1, n)(2, 3, \cdots, n-1). \tag{18b}$$

对 $n = 4$ 这给出

$$\Lambda = \lambda_{12}\lambda_{34} + \lambda_{13}\lambda_{42} + \lambda_{14}\lambda_{23},$$

这正是我们从 §2 以来已熟知的相关形式的不变量. 实际上, 把我们的双线性型 (17) 写成下述简单和式

$$\sum_{i,k} \lambda_{ik}(y_i x_k - x_i y_k), \qquad (19)^{[2]}$$

因此在 $n = 4$ 时它不是别的, 只不过是 $p_{ik}$ 的线性组合

$$-\sum \lambda_{ik} p_{ik},$$

而这就表明 $\lambda_{ik}$ 逆步于 $p_{ik}$, 这就给出了与在那里的论述之间的联系.

但是如果我们把 $\sum \lambda_{ik} y_i$ 对 $k = 1, 2, \cdots, n$ 看成与 $x_k$ 逆步, 因而和在先前对一二次型的极式所写的 (8) 式一样, 写成如下:

$$u_i = \sum \lambda_{ik} x_k, \tag{20}$$

则表达式 $\Lambda$ 对于一般双线性型的意义就清楚了. 由此得出的 "对偶关系" 表示了一种所谓的 "零系 (Nullsystem)", 即

$$\sum u_i x_i = \sum \lambda_{ik} x_i x_k = \frac{1}{2} \sum (\lambda_{ik} + \lambda_{ki}) x_i x_k$$

恒等于零. 它的行列式, 如人们所说的, 是斜对称的 (schief-symmetrisch)

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & 0 & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \quad \text{其中 } \lambda_{ik} = -\lambda_{ki}. \tag{21}$$

[1] Jacobi, Crelles J. 2 (1827) = 全集, 第 4 卷, 19 页. Cayley, Crelles J. **38** (1849)= 全集, 第 1 卷, 410 页.

[2] 原书缺 (19) 式, 今补上. —— 中译本注

因此 $n$ 是奇数时必定为 0; 但是在 $n$ 为偶数时, 正如 Cayley 在上述文献中指出的, 它恰好就是 Pfaff 数组 $\Lambda$ 的平方 (借助于它我们还可以轻松地做到从方程 (20) 解出 $x_k$ 来).

我很遗憾不能更深入地讨论这个有趣的理论. 同样关于我们的双线性型的等价性的判据我也只能谈点它的历史. 根据 Frobenius 发表在 Crelles Journal 84 (1878) 上的重要工作, 我们在此也可以谈秩 $r$, 但它必须是一个偶数. 秩为 $r$ 的形式都能约化为这样的标准形式

$$(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_3y_4 - x_4y_3) + \cdots + (x_{r-1}y_r - x_ry_{r-1}),$$

因而互相等价[1]. 于是它们这样来表征, 在行列式 (21) 中所有其阶次超过 $r$ 的子行列式都等于零.

## 2. 逆 步 变 量

含逆步变量的双线性型

$$\sum \alpha_{ik}u_ix_k \tag{22}$$

其理论走的完全是另一条路线. 我们立即指出, 现在要用下式

$$x_i' = \sum \alpha_{ik}x_k\text{[2]} \tag{23}$$

来替代 (20) 式, 因而这个公式就直接是一个线性代换. 我们可以把它缩写成

$$x' = A(x).$$

在此我们来同时对 $(x'), (x)$ —— 与其同步性质相对应 —— 再作一任意的线性代换 $S$, 则得

$$S(x') = AS(x) \quad 或 \quad x' = S^{-1}AS(x).$$

因而所有这种类型的线性代换对我们的研究来说作用是相同的, 任意一个 $A$ 都可以作为我们研究的起点.

既然现在从不变量 (22) 出发, 所以我们要指出, 随着 (22) 一起从一开始就必须总是把这个平常的双线性型 $u_x$ 看成是已给的. 因此我们来研究一族形式

$$\sum \alpha_{ik}u_ix_k + \lambda \sum u_kx_k,$$

[1] E.Cartan 在他的 Leçons sur les invriants integraux (积分不变量讲义) (Paris, 1922) 一书中的第 53 页给出了一个简单的约化方法. (H.)

[2] 原书中 $x'$ 无下标. —— 中译者注.

并得到它们的行列式为

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}+\lambda & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}+\lambda & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}+\lambda \end{vmatrix} \tag{24}$$

(新近人们多把它缩写为:

$$|\alpha_{ik}+\lambda\delta_{ik}|,$$

就是说我们今后总是要采用 Kronecker 的记号, 即 $\delta_{ii}=1$, 对 $i\neq k$ 有 $\delta_{ik}=0$).

将这个行列式对 $\lambda$ 作幂级数展开:

$$\lambda^n+\Delta_1\lambda^{n-1}+\Delta_2\lambda^{n-2}+\cdots+\Delta_n, \tag{25}$$

*那么可以证明 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n$, 都是 (22) 的不变量, 一般来说, 它们足以表征形式 (22) 在线性代换下的行为.*

但是 "一般来说" 这句话在这里的意思是说, 在有些特殊情况下还需要作些补充. 这种情况只在多项式 (25) 作为 $\lambda$ 的函数含有 $(\lambda-\lambda_i)$ 的多重线性因子的地方才会遇到. 这时就有可能, 这同一个因子 $(\lambda-\lambda_i)$ 以某个重数全在头一个子行列式, 或者全在第二个子行列式, 如此等等. 反之, 如果所有一阶的, 或二阶的, ⋯⋯ 子行列式有一公共因子存在, 那么这个因子就必定会出现在 (25) 中. 在每一个别情况下可以表出给定双线性型对任一代换的特征这种可能性, 整体上可以由所谓的*初等因子* (*Elementarteiler*) 的理论来阐明, 这个理论是由 Sylvester 于 1851 年所开创[1], 由 *Weierstraß* 于 1868 年所完成[2], 最后由 *Frobenius* 于 1879 年把它纳入了有理的形式 (从而人们就再也用不着去确定 (25) 式中的个别线性因子了)[3]. 详见教科书, 例如, Bôcher 所著[4]. 它是一个特别重要的理论, 因为它们能对在各种各样的形式中出现的问题作出最终的分析.

对行列式 (24) 以及由令其等于零而得到的方程的研究通常与一对并列的二次型:

$$\sum \alpha_{ik}x_ix_k \quad \text{及} \quad \sum x_i^2$$

相联系. 这种事情, 例如, 在几何学中, 当人们想寻求一圆锥曲线或一二次曲面的主轴时, 或者在天体力学中计算各个不同的行星轨道的相互作用而产生的久期摄动

[1] Phil.Magazine (4), 1 = 全集, 第 1 卷, 219 及以后页.

[2] Berliner Monatsberichte 1868 = 全集, 第 2 卷, 19 及以后页.

[3] Crelles Journal 86 (带整系数的线性型的理论).

[4] 对其指导思想的一个清晰的表述见: *F.Klein*, Vorlesungen über höhere Geometrie (高等几何讲义) (Berlin 19 26) 379 及以后页. (H.)

时, 就会遇到. 这一天文学提出的问题甚至在历史上是整个理论的源泉; 它要追溯到 Lagrange 和 Laplace; 就是由于这个原因, 人们把这里遇到的方程在纯数学研究中也叫做*久期方程* (Säkulärgleichung)[1] . —— 所有这些开创性的内容与我们的讲述之间的联系就在于, 随二次型 $\sum x_i^2$ 一起给出其对偶变换 $x_i = u_i$, 还在于由此由另一个二次型 $\sum \alpha_{ik}x_ix_k$ 及其极式 $\sum \alpha_{ik}x_iy_k$ 得出我们一开始就来研究的双线性型 $\sum \alpha_{ik}u_iy_k$. 在此只存在 $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ 这一特殊情形, 这是我们没有事先假定的. 于是我们有下述定理: 在 $\alpha_{ik}$ 为实数时, 特征方程的根全为实数, 所有的初等因子都是单重的.

可惜对这个涉及面很广的, 相互关联的一组有趣的问题, 我们不可能再更深究下去.

# B 线性不变量理论的意义随向量分析的引入而导致的扩充[2]

## §1 关于 Erlangen 纲领

我们在 A 中各节对一般线性不变量理论所作的论述, 无论从内容还是到方法, 不言而喻, 只是很不完全的概念. 在内容上我们仅限于在今后讲述过程中必须要用到的那些部分. 但是从方法论的观点来看, 我们只满足于引用一些例子. 人们如何检验一个给定的函数是否为不变量 —— 即借助于适当的符号系统能够对所有的不变量, 即那些在研究中出现的, 其分量不超过一定次数的量丛, 作同等的表述 —— 即人们有办法给出所有在不变量之间成立的恒等式, 特别还有, 在每一种情况下可只限于用一最小的不变量组, 通过它们的多项式就能够以有理和整的形式表述所有其他不变量 —— 要想讲清楚这些, 那是不可能的.

这些概况就表明, 它是一个涉及面很广的完整的学科, 能为掌握在数学中出现的许多问题赋予真正的力量, 因此没有一个数学家能对它置之不理. 这中间, 为了能够达到这个理论的方方面面, 还需要加宽原始的基础, 正如我首次于 1872 年的 7 月在我关于非欧几何的第二篇论文中对它所概述, 紧接着又在 1872 年的 10 月我

[1] 见, 例如, Tissérand: Traité de Mécanique céleste (天体力学通论), 第 1 卷, 第 26, 27 章. 当我们仅限于八大行星时, 久期方程就是当下的这个方程的一个八阶的数值方程. 如果将海王星忽略不计, 那它就是一个七次的方程, Jacobi (Crelles Journal 30, 1845 = 全集, 第 7 卷, 97 及以后页) 研究了它的合乎目的的解. 我们这门科学不断地向外扩张带来的一个令人遗憾的后果就是, 有如此之多的年轻数学家对此只是听说而已, 有的甚至不再知道它了.

[2] 在本节中编者对 Klein 的文本作了部分的改写和删节. 见章末附注 10. (H.)

的 Erlangen 纲领开篇[1] 中所表述了的. 在那里所发展的观点不仅仅一直是我自己后来工作的基础, 而且也为那时正和我一起共同工作的 Sophus Lie 所采纳, 并在他的学生圈子里传播开来, 从而它们就逐渐为更广范围的数学家所周知. 我必须在此更详细地深入谈一谈, 因为物理学家所开展的各式各样的研究可以看成是对那里所表述的一般问题的个别情形的处理, 关于这些物理学上的发展我还会进一步讲到.

简短地来说明一下这个原理. 在 A 中我们是从令原始变量经过一个任意的、行列式为 1 的齐次线性变换来开始的. 尚有待于完成的推广就是, 要把这种变换的整体放到群论的概念下来理解. 这样就引出了一个问题, 它在 Erlangen 纲领的第 7 页上是这样用语言表示的:

"已给一流形以及在这个流形上的变换群: 要求研究关于这个流形的形体 (Gebilde) 的这样一些性质, 它们在这个变换群下保持不变."

几行之后又改说成:

"要求发展一个相对于这个群的不变量理论."

这也可以写成:

"那些相对于群为不变的关系的理论", 所以这到相对论这个词就只差一步之遥了, 这个词是现代物理学家用来表示在属于他们的领域内所设定的普遍目标的各种情形的.

Erlangen 纲领是属于那样的一种论著, 它通过归纳整理现存的来激励出创新的. 因此当有什么进一步的论述加入, 我总是非常赞同的. 除了离散群理论的发展之外, 作为重大进展的在此还要提到连续群的普遍理论, 它是 Lie 在 1872 年以后所创立的, 但后来又由好几个年轻的数学家对个别的线性群作了直接的代数处理. 我已经在 1892—1893 年间在我的石印本的《高等几何导论》[2] 中, 对当时所有的材料在为期一年讲授中作了很好概述. 更进一步的许多内容可参见数学百科全书的第三卷 (Math. Enzyklopädie, III A B, 4b) 中 Fano 写的条目: "Kontinuierliche geometrische Gruppen. Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip (连续几何群. 作为几何分类原理的群论)" (1907).

我相信, 尽管 Erlangen 纲领作为发展过程的一个新的开端是特别对几何学来讲的, 为了应用 Graßmann 的一般表述方式, 或者也可以看成是对延伸学来讲的. 我是在那种只把对几何问题的射影几何处理才看成是科学处理的狭隘观念下成长起来的, 在用一种多层次的变换几何的思想来替代射影几何的同时, 也就是用了一种更为宽松一点的学说来代替这一狭隘观念了. 毫不奇怪, 这个纲领一开始就遇到

[1] 关于新近几何学研究的比较考察 (Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.), Erlangen, 1872 年 12 月发出, 由于排字工人的大罢工拖到 1873 年才发表在 Math. Ann. (数学年鉴) 第 6 卷上. 这个 Erlangen 纲领后来又刊载在 Math. Ann. (1893), 第 43 卷上, Klein: 论文全集第 1 卷, 460 页, 此外还多次被重印和被译成其他文字.

[2] 到现在已经作为正式书籍出版了: F. Klein, 高等几何讲义, Berlin 1926. (H.)

了旧思想的代表人物的重重阻力. 我那时对我尊敬的老师 Clebsch 将如何面对这场争论特别期待. 但是这时一场十分意外的灾难降临了, 在与我的纲领正好付印的同时, Clebsch 那时才 39 岁, 突然死于白喉感染 (在 1872 年的 11 月 7 日). 这一情况那时对我的科学工作从各个方面都造成了新的困难条件, 也许就是由于这个原因我不得不接受了另一个机会.

## §2 对三维空间的特殊考察

### 过渡到齐次正交群

Erlangen 纲领的方法对研究 $R_3$ 的几何提出了多种可能的起点, 在此我们只想提出线性代换群这最简单的一种. 我干脆从第一卷 168 页[1] 的公式来开始. 我设想取一普通的直角坐标为基础, 用通常的记号 $x, y, z$ 来表示, 同时写成下下列三个群:

1. "射影" 几何群:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta}{\alpha''' x + \beta''' y + \gamma''' z + \delta'''}, \\ y' &= \frac{\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta'}{\alpha''' x + \beta''' y + \gamma''' z + \delta'''}, \\ z' &= \frac{\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \delta''}{\alpha''' x + \beta''' y + \gamma''' z + \delta'''}. \end{aligned} \tag{1}$$

2. 仿射几何群:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta, \\ y' &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta', \\ z' &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \delta''. \end{aligned} \tag{2}$$

3. 度量几何群:

变换公式和 (2) 式一样, 只是代换

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} \tag{3}$$

是一个 "正交" 代换, 即将式 $x^2 + y^2 + z^2$ 变换到自身的代换.

为了得到全部齐次线性代换, 人们当然可以和最初 Plücker 所做的那样, 采用如下的技巧:

$$将\ x, y, z\ 分别代之以\ \frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4},$$

[1] 中译本: 139 页. —— 中译者注

然后分开成分子与分母. 这在现在所有的教科书中都能找到. 我们在此打算, 在局限于情形 (2),(3) 的同时, 再采用一个比较简单的 (完全是平常的) 办法, 就是略去代换公式中的附加常数项. 于是代替 (2) 式是下面坐标原点固定不变的仿射变换

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y + \gamma z, \\ y' &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \\ z' &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z, \end{aligned} \tag{2'}$$

同样地, 代替 (3) 式我们用由 (2′) 式确定的, 坐标原点固定的正交变换以及附加的公式

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{3'}$$

在我们这样地特殊化到公式 (2),(3) 的同时, 也就放弃了对仿射几何 (或与它一致的刚体静力学与动力学) 作普遍的考察. 为此, 在情形 (2′) 式中我们取至今所考察过的三个变量的线性不变量理论与之直接相联[1], 而在情形 (3′) 中, 则取我们称之为 (三个变量的) 正交线性不变量理论与之直接相联系.

首先还要准确地给出, $n$ 个变量的齐次正交代换是什么. 我们首先写下, 例如 (紧接着 A 的 §1 之后):

$$x_i = s_{i1}x'_1 + \cdots + s_{in}x'_n \text{ 并附有 } \sum x_i^2 = \sum x_i'^2. \tag{4}$$

接下来是一个很有名的理论, 从其本质上来讲要回溯到 Euler 和 Lagrange, 就是说, 在 $n^2$ 个系数 $s_{ik}$ 之间存在着 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 个方程:

$$\sum_i s_{ik}^2 = 1, \quad \sum_i s_{ik}s_{il} = 0, \quad (k \neq l)(k = 1, \cdots, n), \quad (l = 2, \cdots, n), \tag{5}$$

这相当于齐次正交代换群 (4) 含有 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个参数 —— 此外 (4) 的解可表为:

$$x'_k = s_{1k}x_1 + \cdots + s_{nk}x_n, \tag{6}$$

于是代替 (5) 式我们还可以写下方程 (7):

$$\sum_k s_{ik}^2 = 1, \quad \sum_k s_{ik}s_{jk} = 0, \quad (i \neq j)(i = 1, \cdots, n), \quad (j = 1, \cdots, n) \tag{7}$$

特别地我们再进一步来考察代换行列式

$$r = |s_{ik}|. \tag{8}$$

[1] 但这里的代换系数的行列式在最开始还不一定必须为 1, 如我们在前面 3 页上为了简单起见所假设的.

通过让它们按下述矩阵自相乘:

$$\begin{vmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} s_{11} & \cdots & s_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{1n} & \cdots & s_{nn} \end{vmatrix}$$

就可以得出, $r^2 = 1$. 但从方程 (5) 或 (7) 就得不出更多的东西了. 就是说还可能有 $r = +1$, 或 $r = -1$, 于是相应地把正交代换区分为**正常的** (*eigentliche*) 和**反常的** (*uneigentliche*) 正交代换. 因为在两个线性代换相结合时它们的行列式相乘, 由此可知, 只有正常的代换才能只取自身而构成一个群, 随之表明它是一个**连续的** $G_{\frac{n(n-1)}{2}}$ 群[1]. —— 可是另一方面, 正常的和反常的代换合在一起构成一个所谓的**混合** (*gemischte*) 群 (参数的个数一样). 实际上这种反常的代换中不含有所谓无穷小代换 (即它与 "恒等 (Identität)" 代换相差 "无限的少"). 当我们只改变变量 $x_1, \cdots, x_n$ 其中之一的符号时所得的代换就是反常代换的最简单的例子. 正常代换在几何上就意味着绕 $O$ 点的 "转动", 而反常代换则是另一种变换, Study 把它们一般地称之为 "反转 (Umlegungen)" (Math. Ann. 39 (数学年刊第 39 卷)).

到这里就有了个问题, 这对以下全部内容来说都是一个基本问题, 这就是, 在正交代换的不变量理论中, 是只需考虑正常的代换就够了, 还是也要考虑反常的代换. 第一种考虑是比较容易的 (正如我们在阐述一般不变量理论时, 为了简单起见就已经经常假定了 $r = 1$). 但在第二种考虑中能给出某些更精细的区分, 它们已经证明在现代物理的精确研究中是非常重要的, 例如, 将向量区分为第一类和第二类; 我们将只限于在有机会的时候来谈一谈.

## §3 四元数插话

Hamilton 的四元数计算我们已经在第一卷的第 4 章中详细讨论过了. 为了在后面的能用到它, 在这里我还要讲一下, 如何借助于四元数的乘法以最简单的方式来表述三个和四个变量的、行列式为 $+1$ 的正交变换.

我简短地来回顾一下: 四元数是一种由四项组成的复合数:

$$q = d + ia + jb + kc,$$

它们的乘法满足下面的式子:

$$\left.\begin{matrix} jk = i, & ki = j, & ij = k \\ kj = -i, & ik = -j, & ji = -k \end{matrix}\right| i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

[1] 在今后 $G_k$ 就用来表示含 $k$ 个参数的连续群.

因而下述方程

$$t' + ix' + jy' + kz' = q(t + ix + jy + kz)$$

就等价于下述线性代换:

$$\begin{aligned} t' &= dt - ax - by - cz, \\ x' &= at + dx - cy + bz, \\ y' &= bt + cx + dy - az, \\ z' &= ct - bx + ay + dz, \end{aligned} \tag{A}$$

它与一行列式为 +1 的正交代换已经非常接近了, 因为第一, 人们通过计算可得:

$$t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)(d^2 + a^2 + b^2 + c^2),$$

第二, 其行列式取值为 $(d^2 + a^2 + b^2 + c^2)^2$.

从这里出发到那奇妙的公式只差一步之遥了, 这是一个用来一般地表述四个变量的正常正交代换的公式, 由 Cayley 发表在 Crelles Journal, 第 50 卷 = 全集, 第 II 卷, 192, 202 页上, 公式如下:

$$t' + ix' + jy' + kz' = \frac{q(t + ix + jy + kz)q'}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}\sqrt{(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2)}}, \tag{37}$$

其中 $q' = d' + ia' + jb' + kc'$ 为一任意的第二个四元数. 而三个变量的正常正交代换的一般表示, 只要令 $q'$ 等于 $d - ia - jb - kc$ 就能得到. 实际上我们这时有, 正如人们验算过的, $t' = t$, 并且绕一点的转动还有公式:

$$ix' + jy' + kz' = q(ix + jy + kz)q^{-1}, \tag{38}$$

它是 Hamilton 和 Cayley 在 1844 年就已经建立了的.

至于公式 (37) 和 (38) 含有正确的独立参数个数, 分别为 6 和 3 这一点通过简单的计算就可以证明. 现在还要说明的是, 公式 (37) 可以由二阶的矩阵的相乘得出 (关于这一点在第一卷的第 4 章, 196 页就已经初步谈到了)[1] .

为了避免与四元数理论中的 $i$ 混淆起见, 我们暂时令通常的 $\sqrt{-1}$ 等于 $\varepsilon$. 再进一步令:

$$d + \varepsilon a = \alpha, \quad b + \varepsilon c = \beta, \quad -b + \varepsilon c = \gamma, \quad d - \varepsilon a = \delta,$$

并类似地令:

$$t + \varepsilon x = \xi, \quad y + \varepsilon z = \eta, \quad -y + \varepsilon z = \zeta, \quad t - \varepsilon x = \tau \quad (t' + \varepsilon x' = \xi' \text{ 等等}).$$

于是代换 (A) 就可以写成如下的两个二阶矩阵的相乘

$$\begin{pmatrix} \xi' & \eta' \\ \varsigma' & \tau' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ \varsigma & \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\xi + \beta\varsigma & \alpha\eta + \beta\tau \\ \gamma\xi + \delta\varsigma & \gamma\eta + \delta\tau \end{pmatrix},$$

[1] 这里原文可能有误, 似应为 “190 页”, 中译本 159 页. —— 中译者注

这里第一个矩阵的横行与第二个矩阵的纵列相相乘. 在这里下述行列式

$$\begin{vmatrix} \xi' & \eta' \\ \varsigma' & \tau' \end{vmatrix}$$

等于下面两个行列式的乘积:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi & \eta \\ \varsigma & \tau \end{vmatrix},$$

这一点是行列式乘法法则的直接结果. 完全相同地我们可得到:

$$\begin{pmatrix} \xi & \eta \\ \varsigma & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha'\xi + \gamma'\eta & \beta'\xi + \delta'\eta \\ \alpha'\varsigma + \gamma'\tau & \beta'\varsigma + \delta'\tau \end{pmatrix}.$$

至今在矩阵

$$\begin{pmatrix} \xi & \eta \\ \varsigma & \tau \end{pmatrix}$$

的同一横行里的元素是线性相关的. 但是公式 (37) 可以写成如下:

$$\begin{pmatrix} \xi' & \eta' \\ \varsigma' & \tau' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ \varsigma & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} : \sqrt{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma')}, \qquad (37')$$

并且关于它们的论断显然可归结为: 一方面把纵列的元素作线性组合, 另一方面又把横行的元素作线性组合, 通过这样的方法就可得到矩阵 $\begin{pmatrix} \xi & \eta \\ \varsigma & \tau \end{pmatrix}$ 那样一种最一般的线性变换, 这种线性变换只是将它的行列式乘上一个因子. 通过这种变换就可以将四元数的乘法, 因而也就能将行列式为 $+1$ 的正交代换与二阶线性代换联系起来 (这时如果人们要想用它来表示实转动, 就必须令 $\alpha$ 与 $\delta$, 以及 $\beta$ 与 $-\gamma$ 互为复共轭). 三个和四个变量的实正交变换的不变量理论就可以建立在这里所指出的对一般二元不变量理论的限制的考虑之上. 这就是 Wälsch 在他的 "二元分析" 中第一个对 $n = 3$ 的情形做过系统研究的. 我建议大家去看他发表在 Comptes Rendus (巴黎科学院汇刊) 的第 143 和 144 卷 (1906, II; 和 1907, I) 上综述性的文章. 那些一再与下面要提到的 Schouten 在 1914 年[1] 出版的书相平行的发展 —— 正是由于在不变量理论中发展出来的方法的培育 —— 在它们的领域内已经走得比我们这里讲的远多了. 但是我担心只有很少的读者能顺应它们, 因为一方面它们要求有多种多样的预备知识 (也包括数学 - 物理方面的知识), 另一方面为了简短起见又在公式的表达上用了特别的速记符号. 我们还可以把研究延伸到反常的正交代换, 这时

[1] 见 45 页 (中译本 41 页).

只要把 $\varepsilon$ 换成 $-\varepsilon$ 就可以了. 最近 Wälsch 还研究了 $n=4$ 的情形, 但是拿出来一看, 结果显然就是四元数.

在这里讲这些就够了. 关于那些包含在 (37) 式中的代数结果 (利用它们可以将二次曲面 $\xi\tau-\eta\varsigma=0$ 的两族直线母线相互变换) 的 (射影) 几何的意义, 我和别人一起在 Mathem. Annalen (数学年刊) 的第 37 卷 (1890) 上已作过深入的讨论.

不管怎么说, 我们已经看到, 四元数在研究三个和四个变量的正交代换上是如何正好适合的. 在涉及这种代换的各个领域, 它在那里就都非常有用. 可是现在再也不会有人像 Hamilton 和他的门生曾经想的那样, 把它看成是解决几何上一切亟待解决的问题的万应灵药.

## §4 过渡到向量代数和张量代数的基本概念*

我们现在的任务不是要去详细论述齐次正交代换的一个系统的不变量理论, 而只是想去阐述, 人们是如何地从不变量理论的基本原理出发来直接得出在 $n=3$ 以及 $n=4$ 的情况下的向量代数的全部概念, 这些概念是物理学家非常熟悉的[1].

1. $n=3$.

只要我们以齐次仿射群为基础, 今后我们就把三个变量

$$x, y, z \tag{9}$$

从整体上看成为一个从 $O$ 点发出的一条 "线段". 如果局限于齐次正交代换群, 那么这个概念就与物理学家根据 Hamilton 的提议而称之为 (从 $O$ 点发出的)向量的那个概念相一致. 因为所涉及的只是正交代换, 于是我们就有了属于它的一个最简单的不变量 (数量) 的例子为

$$x^2+y^2+z^2; \tag{10}$$

物理学家又一次跟随 Hamilton 把它们说成是标量. 但是 (10) 式的极式

$$x'x+y'y+z'z, \tag{11}$$

其中 $(x,y,z)$ 以及 $(x',y',z')$ 理解为向量, 也是一个不变量. 如果物理学家把它们称之为两个向量的内积或标量积, 那么 Graßmann, 和 Hamilton 一样, 把他的迄今为止的理论与有多项的复数联系起来就很重要了, 这一点我们还会回过头来讲; 见第一卷, 第 4 章, 173 页后[2].

---

[1] 这里存在一个特别的困难, 这就是不同的作者所采用的术语和符号语言各不相同. 在我把后者暂时完全放到一边的同时, 我只想采用这样一些术语, 它们在当今是每一个德国物理学家能够普遍理解的.

[2] 见中译本, 第一卷, 第 4 章, 142 页. —— 中译者注

对我们的理解来说很基本的一条是, 本来 $x', y', z'$ 相对于 $x, y, z$ 是同步的, 但是根据 (11) 式为不变量这一点, 又可以理解为相对于 $x, y, z$ 是逆步的. 任何时候, 如果要处理的是涉及一个量丛的齐次正交代换, 那么同步与逆步间的差异就消失了.

我们现在来考察由不同的向量来构造 Graßmann 层量, 并从下面的行列式开始:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}. \tag{12}$$

依据我们所考虑的正交代换的行列式是 $+1$ 或 $-1$ 的不同, 它们或者保持不变, 或者改变符号; 物理学家为了强调是后一种情况, 就称它们为第二类标量, 或伪标量 (Pseudoskalar). 我们进一步通过将 (12) 式按第一行的元素展开:

$$x\,(y'z'' - z'y'') + y\,(z'x'' - x'z'') + z\,(x'y'' - y'x''),$$

我们认识到, 下述第二层量:

$$y'z'' - z'y'', \quad z'x'' - x'z'', \quad x'y'' - y'x'', \tag{13}$$

由于对 $x, y, z$ 为逆步, 在正常正交代换下本身仍具有向量的特性, 但在反常的正交代换下就表现出同步改变符号. —— 物理学家把这说成是 $x', y', z'$ 与 $x'', y'', z''$ 这两个向量的外积或向量积, 并把它们的三个分量的总体称之为第二类向量, 或 "轴向量 (axiale Vektor)" 以别于原来出现的 "极向量 (polare Vektor)" (9).

现在来讨论向量分量的二次型

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy. \tag{14}$$

这个式子在连续体的变形中起主导作用, 有鉴于此, 按照 Voigt 的建议, 人们把这组系数

$$a, b, c, d, e, f \tag{15}$$

称之为一张量 (*Tensor*). —— 相对于仿射变换, 张量可以按其秩 (*Range*) 来区分, 而当人们只考虑实系数系统时, 则可以按它们的惯性指数 (Trägheitsindex) 来区分; 见 A §5. 如局限于正交代换则伴随 (14) 式自然地有二次型 $x^2 + y^2 + z^2$, 这就导致了要考察下述 "特征多项式":

$$\begin{vmatrix} a+\lambda & f & e \\ f & b+\lambda & d \\ e & d & c+\lambda \end{vmatrix}. \tag{16}$$

通过将它按 $\lambda$ 的幂次展开:

$$\lambda^3+(a+b+c)\,\lambda^2+(bc+ca+ab-d^2-e^2-f^2)\lambda+\begin{vmatrix} a & f & e \\ f & b & d \\ e & d & c \end{vmatrix}, \tag{16'}$$

我们就从其中出现的三个因子 $\lambda^2, \lambda^1, \lambda^0$ 得到张量的三个基本正交不变量. 从它们可以组合成如下的

$$\begin{aligned}&(a+b+c)^2-2(bc+ca+ab-d^2-e^2-f^2)\\ =\,&a^2+b^2+c^2+2d^2+2e^2+2f^2\end{aligned} \tag{17}$$

以及一些类似的不变量. 通过从对两个张量 $a, b, c, \cdots$, 以及 $a', b', c', \cdots$ 所构成的表达式 (17), 我们可组成如下的极式 (Polare):

$$aa'+bb'+cc'+2dd'+2ee'+2ff', \tag{18}$$

由此我们认识到, 量

$$a, \quad b, \quad c, \quad \sqrt{2}d, \quad \sqrt{2}e, \quad \sqrt{2}f$$

对于它自身逆步. 但是按照 (14) 它们对

$$x^2, \quad y^2, \quad z^2, \quad \sqrt{2}yz, \quad \sqrt{2}zx, \quad \sqrt{2}xy. \tag{18'}$$

也是逆步的. 也许把 (18) 中所有量作为张量的分量来引入是恰当的 —— 顺便说一下, 这也是符合一般不变量理论的基本原则的.

随二次型 (14) 一起同时也就完成了它们的极式, 从而也就处理了其双线性型 (到目前为止我们尚未区分在其中出现的变量序列是同步的, 还是逆步的). 一个反对称的双线性型可写成:

$$A(yz'-y'z)+B(zx'-z'x)+C(xy'-x'y). \tag{19}$$

这里的系数 $A, B, C$ 是一个第二类向量. 一个一般的双线性型 (是我们尚未将它分解为对称部分和反对称部分的), 对我们来说, 与下述一般齐次仿射变换:

$$\begin{aligned}x'&=\alpha x+\beta y+\gamma z,\\ y'&=\alpha' x+\beta' y+\gamma' z,\\ z'&=\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z\end{aligned} \tag{20}$$

是等价的. 因此今天德国的几何学家把数系 $(\alpha, \cdots, \gamma'')$ 称之为*仿射量* (*Affinor*), 在 Hamilton 那里这个变换是以 "线性向量函数" 的称呼出现 (一个向量的分量是另一个向量分量的函数). 至此甚至 Gibbs 称之为 "并矢 (Dyade)" 的也是属于这类量; 见 43 页.

2. $n=4$ (简单讨论). 这时的变量可记为 $x_1,x_2,x_3,x_4$. 此外, 按照 Sommerfeld 的先例 (Ann.d.Physik (物理年刊) [4], 第 32 卷, 1910), 在 $n=4$ 的时候仍保留 $n=3$ 时用的标量、向量、张量这些称呼, 只是在其前附加一个能指示其分量个数的前置词, 以示区分.

一数组 $x_1,x_2,x_3,x_4$ (设想它们将经过一任意的齐次正交代换), 相应地就称为**四维向量** (*Viererverktor*); 由它可以导出

$$\sum x_i^2$$

作为最简单的标量.

一个二次型 $\sum a_{ik}x_ix_k$ (或者也还有对称双线性形式) 的系数现在就称作**十维张量** (*Zehnertensor*). 一个十维张量有四个主不变量 (Hauptinvariant) (标量), 我们可以通过将行列式 $|a_{ik}+\lambda\delta_{ik}|$ —— 这里用的是 Kronecker 的记法 —— 对 $\lambda$ 的幂次展开来得到.

一反对称双线性型 $\lambda_{ik}(x_iy_k-y_ix_k)$ 的系数称之为**六维张量**; 它有两个属于它的最简单的标量: $\sum\lambda_{ik}^2$ 和

$$\Lambda=\lambda_{12}\lambda_{34}+\lambda_{13}\lambda_{42}+\lambda_{14}\lambda_{23}^*.$$

## §5 向量分析* (张量分析) 的引入

我们暂时再次回到 $n=3$ 的情况. 有必要在我们至今所讲到的发展上接着讲一个应用范围非常广的新概念, **场的概念**.

我们至此所考察过的标量, 向量, 张量, …… 是对坐标原点来讲的 (因为我们讲到的是 $x,y,z$ 的齐次正交代换); 因而现在我们要对空间的每一个点 $x_0,y_0,z_0$ 赋予一个标量, 或向量, 或张量, ……, 从而上升到**标量场**, **向量场**, **张量场**, …… 的概念. 用这种方式对应于点 $x_0,y_0,z_0$ 给定的 "量丛" 就必定会在

$$x-x_0,\quad y-y_0,\quad z-z_0$$

的齐次正交代换下表现为一标量, 一向量, …… 等等的分量.

自从有了数学物理, 场的概念就会自动地呈现出来. 首先明显出现的可能就是在热学中的标量场, 这时我们是把温度作为位置的函数理解为标量场. 此后人们就很自然地注意到那些在经典力学中会出现的各种类型的场 (势场, 力场, ……). 在这之后连续介质力学进一步提供了大量的例子. 但是只有到了现代的电磁学 (它把空间媒体看成是电磁现象的载体) 这个概念才有了它的清楚明确的模样: 人们发现 "场" 这个词, 就我所知, 最早出现在 W. Thomson 论磁学的鸿篇巨著中 (1851 年发表在 Philosophical Magazine (哲学杂志) 上 = 电学与磁学论文集重印本, 473 页)

—— 另一方面我们又可以在抽象的不变理论的推广形式中引进场的概念, 这就是我们设想所研究的量丛依赖于某些参数.

我将在这里以广义的方式来引用“向量代数”这个词, 它把标量的、张量的代数学都包括在一起. 于是由这样理解的“向量代数”借助于场的概念就可以引出“向量分析”, 办法就是把对参数 $x_0,y_0,z_0$ 的微分或积分取作为对我们所研究的量丛的分量的运算引进来. 抽象数学家喜欢这样说, 随着代数不变量再建立*微分不变量*, *积分不变量*. —— 顺便说一下, 今后将把 $x_0, y_0, z_0$ 就简单地写成 $x, y, z$, 从而附在点 $x, y, z$ 上的向量记为 $u, v, w$. 从现在起我还要忽略第一类和第二类标量, 第一类和第二类向量之间的区别 (Hamilton 就常常是这样, Maxwell 大多数的情况下也是这样做的), 因而我也就只限于讨论正常正交代换下的不变量理论.

对于新近考察的观念来说, 下面确实是个很好的最简单的例子, 即对一给定的空间位置函数 $f(x,y,z)$ 来说, 可以看出下面两个表达式

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \quad \text{和} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{21}$$[1]

与坐标系无关, 从而由一个标量场导出了两个新的标量场. 法国数学家 Lamé (1795 — 1870), 他是从原则上领悟了这一过程的人 (参见他的 Leçons sur les Coordonnées Curvilignes (曲线坐标讲义) Paris, 1859), 就是因为它们的不变性, 把它们分别称之为*第一和第二微分参数* (上引书 6 页). 但是他离向量性的思想还很远. 这些具有我们今天所考察的形式的东西首先是由 Hamilton 所建立的 (见他的四元数讲义, 1853, 还有本书第一卷第 4 章, 187 页[2]). 在英国分析学家的符号方法上训练有素的他, 不仅把

$$\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial z} \tag{22}$$

看成是向量 (因而人们随 Maxwell 一道把它称之为“*梯度*”), 而且直接把下述符号本身:

$$\frac{\partial}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial z} \tag{23}$$

看成是向量. 这样一来, 下面的表示式:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \tag{24}$$

而且完全同样地也还有

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{25}$$

[1] 原书缺公式编号 (21), 此系中译者所补.—— 中译者注

[2] 中译本, 156 页. —— 中译者注

都是标量, 就是说是些这样的运算, 它们作用到 (用 Hamilton 的话来说, 用它们来乘) 另一个标量, 所得还是一个标量. 可以同样好地看到, 下面六个微分系数

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \tag{26}$$

表现为一张量, 而且 (25) 不是别的, 只不过是每一个张量都具有的线性不变量.

人们在这里看到, 我们所持的纯粹形式的观点是如何具有深远的作用 (而适度的直观就不灵了, 教科书通常就是从这种适度的直观来开始的):

$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ 表一向量, 因为它在 $dx, dy, dz$ 的正交代换下的行为和一个向量的分量一样, 并且由于

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

在 $f$ 为标量时也是标量, 再次是这种情况. 至于 Hamilton 在这种研究中采用了他的四元数记号, 并将分量 (23) 组合成下面的符号

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}, \text{[1]} \tag{27}$$

这些我们就不在这里多谈了.

事实上 Maxwell 在他的电磁学通论 (1873) 中就已经没有采用这种外在的四元数形式, 而首先为物理学家准备了向量概念的就是这本书. 他还特别让我们注意到, 如果

$$u, \quad v, \quad w$$

为一给定的向量场, 表达式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{28}$$

就定义了一个属于这个向量场的标量场, 此外还有下式

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \tag{29}$$

则给出了属于这个向量场的一个向量场[2]. 在此我们来追踪 (28) 式和 (29) 式是如何逐渐获得了普遍接受的确定名称, 也是有趣的. 与流体动力学的概念相联系, Maxwell 将 (28) 式, 取其负值, 称之为*聚度* (*Konvergenz*), 而今天流行的术语是*散度* (*Divergenz*) (指 (28) 式本身), 它最初是由 Clifford 在他的 "Kinematic (运动学)"

[1] 四元数学家称之为 "Nabla", 因为这个符号 $\nabla$ 像一种希伯来人的乐器, 这种乐器的名称就叫 Nabla.

[2] 根据我们先前给出的原则就可以明白这二者, 只要我们令 $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ 本身看成是一个向量, 再把 $u, v, w$ 与它作标量积或向量积.

一书的第 209 — 210 页上完全是顺便附带地提议的. 向量 (29) 式原来 Maxwell 称其为*旋转度* (*Rotation*) (尽管它大小是液体粒子转动速度的二倍); 在他的通论中他把它称为 "curl", 这是一个英文术语, 有些地方译成德语的 "Quirl", 这在德语的书籍和文献中也用得相当普遍了. 可是今天人们又再次回过来用 "*rot*", 很多人按照 Clifford 称其为 "Rotor (旋度)".

对那些特殊的向量场, 即那些 (28) 式或 (29) 式恒等于零的向量场, W. Thomson 在上引文献中已经把它们叫做*旋流* (*solenoidal*) *场*和*层流* (*lamellar*) *场*, 换一种说法, 在坚持流体动力学的图像下, 称之为*无源的* (*quellenfrei*) *和无旋的* (*wirbelfrei*) *场*. 从一开始就清楚, 表达式 (28) 只有在正交代换下才是不变的, 但表达式 (29) 可在行列式为 +1 的任一仿射代换下保持不变 (因为它们相应于二阶 Graßmann 子行列式). 我们还可以更进一步作出结论说, 下式

$$u\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)+v\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)+w\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{30}$$

也表现为一仿射不变量. 表达式 (29), (30) 的出场自然不是偶然的, 当在一般分析中要研究线性微分表达式 (Pfaff 式)

$$udx+vdy+wdz, \tag{31}$$

要根据它们在任意点变换

$$x=\varphi(\xi\eta\varsigma),\quad y=\psi(\xi\mu\alpha\varsigma),\quad z=\chi(\xi\eta\varsigma)$$

下的行为进行分类时它们就会出现[1]. 因为在标量 (31) 中出现的 $dx, dy, dz$ 在这样一个变换下就已经是作仿射变换的了. 接下来的就是 Graßmann 所做令人瞩目的工作, 他在其 1862 年的延伸学中把这些公式推广了到任意的 $n$, 总的来说也就是将有 $n$ 项的 Pfaff 式根据它们在任意点变换下的行为作了分类. 我们可以这样来说, 他由此就给 $n$ 维向量场的研究, 就以考虑仿射性质而言, 打下了一个坚实的基础.

为了给出一个积分不变量的例子, 我们把对任意向量场描述扩充为由一个层流场和一个旋流场的叠加, 这从事情的本质上来说, 是 Stokes 已经在 1850 年就给出过了[2]. 我们令

$$\begin{aligned}
u&=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial y},\\
v&=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial z},\\
w&=\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial x},
\end{aligned} \tag{32}$$

[1] 众所周知, 表达式 (29) 等于零意味着 (31) 式是个全微分, 而 (30) 式等于零则通过乘一个因子就可变成这样一个全微分.

[2] Stokes: Cambridge Trans. (剑桥哲学学会会刊) 9 = 文集, 第 2 卷, 255 页以后各页. —— 我在这里是根据 Abraham 在数学百科全书 IV, 14 上所写的条目中所给出的、被引用得最多的文献, 在那里人们还可以找到许多有趣的单条的注释, 我不可能在这里复述.

此外再加上条件:

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}=0. \tag{32'}$$

我们发现, 对 “标量势” $f$ 有:

$$\Delta f^{[1]}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}, \tag{33}$$

对 “向量势” $(U,V,W)$ 有[2]:

$$-\Delta U=\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y},\quad -\Delta V=\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z},\quad -\Delta W=\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{34}$$

就是说找到了它们的微分方程, 根据势论中众所周知的方法, 在对 $u,v,w$ 在无穷远处的行为以及对它所特别具有的奇点作适当假设的条件下, 可以通过下述定积分求出它的解:

$$f(a,b,c)=\frac{1}{4}\iiint\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dxdydz}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}\text{ 等等}. \tag{35}$$

## §6 向量学中的不变量理论表述

如果我们将前述向量学等等表述为正交代换群的不变量理论的一个旁系 (而不是特地依赖于几何的直观), 那么我不得不说, 在文献中这种表述还很少遇到.

在这方面我只知道很少几个例外, 我来讲其中的两个.

其中第一个与一篇也是很有趣的论文有关, 这篇论文是英国的物理学家和工程师 Rankine 在 1855/56 年就已经发表在 London Philosophical Transactions (伦敦哲学会刊) 第 146 卷上了[3]. 我们都知道, 在弹性体中的各点有无穷小位移 $u,v,w$ 时, 其中一处周围的变形由下述六个分量来给定:

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial z},\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right),\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right), \tag{36}$$

接着 Rankine 就直接用 Sylvester 在那时新建立的理论来处理这个张量, 完全像我们今天用不变量理论方法来处理一样.

此外, 我再来讲一个 Burkhardt 发表在 Math.Ann. (数学年刊) 第 43 卷 (1893) 上的一个工作[4]. 在此前不久 Drude 在他的光学研究中提出了这样一个问题:

---

[1] 这里原著为 $\nabla f$, 疑有误. —— 中译者注

[2] 这里各式中原著为 $\nabla U,\nabla V$ 及 $\nabla W$, 疑有误. —— 中译者注

[3] On axes of elasticity and crystalline forms (论弹性体的轴和晶体的形状).

[4] 论自变量为向量, 函数本身仍为向量的向量函数.

"设已给任意多个向量, 它们是一个点或多个点的位置的函数; 要求人们以最一般的方式按照其坐标来确定同样是这些函数及其微商, 而这些坐标本身又是向量"—— Burkhardt 首先把问题限制在这些所给的向量的分量是有理整函数, 要求它们分别对 $x, y, z$ 所取的微商为线性; 于是他就能用级数展开的方法来研究这个问题, 这在线性不变量理论中就经常是这样. 这样一来就在连续介质的数学物理中出现的微分方程的结构中获得了一个更好的认识. 因而这样从不变量理论中获取知识的确是很有用的.

为什么这一类的出版物这样少呢? 为什么 Rankine 的冲击, 它一般来说是由他的同胞在数学 - 物理方面的工作与在形式代数方面的工作相结合的产物, 要逐渐衰退呢? 我们发现, 此后不久在英国就出现了两个学派的尖锐的对立: 不变量理论及其射影几何的诠释在物理学家看来是完全多余的东西, 就像有一天 Edinburgh (爱丁堡) 的物理学家 Tait 遇到了 Cayley 问道: 一个这样出色的人把他的精力全都投到那些完全无用的问题上去了, 是不是太遗憾了?

我之所以这样愿意谈到这个令人遗憾的情况, 就是因为它们在今天的数学中并不是孤立的, 相似的情况在不同的圈子里以各种不同的原因经常一再出现.

主要的根源完全在于范围太广了, 科学发展越久它所扩展到的范围就越大. 个体的研究者再也没有时间 —— 或者他们以为他们再也没有时间 —— 去获得广博的数学教养. 他们宁愿一次又一次地从自己的特殊起点出发, 而这也是他们所必须的, 从而也就不自觉地从内心越来越受到学校传统的束缚, 而他们就是在这种传统中成长起来的. 这样一来非常遗憾的是, 那种对各类数学研究的统一性的感知就将丧失殆尽.

在向量分析的情况下我们还要注意一点, 这就是, 在所研究的领域, 这样来说吧, 已经被 Hamilton 和 Graßmann 的符号方法捷足先登了. 有谁一旦习惯了某种公式形式, 他就很难于决定去仔细考虑别的书写方式可能有的优点, 甚至于去促进推广它们. 随着进一步的发展, 仅就我们在以后所能找得到文献而言, 就太能说明这一点了. 这样一来就导致了完全不必要的精力浪费; 同一样的思路总是一再以另一种方式重新构造出来. 于是造成了一种混乱, 就好像一条河, 它本来是可以承载巨大的航运任务的, 结果自己不断地乱分叉.

本书的一个任务就是对在这里提到的这个弊端作斗争[1].

[1] 与此相关我们在这里要提到荷兰人 J. A. Schouten 的一本著作 Grundlagen der Vektor- und Affinoranalysis (向量分析与仿射量分析基础), 1914. 在其中作者原则上与 Erlangen 纲领的一般观念相联系, 同时又对 Hamilton 及 Graßmann 等人的各种各样的创造性发展分别指出它们的特殊地位. 它本身是很详尽的, 这是我们所期待的, 而且作者又深入细致地考察了高阶量的结合, 远远超出了我们在此所涉及的理论的初步, 这更是值得赞赏. 但是可惜的是, 他在叙述上不是从早就确立了的线性不变量理论的方法出发, 而是大量地采用了新近引入的乘法符号, 其数量之多, 例如, 连我自己也不能跟随其细节.

## §7 关于在 Maxwell 的 Treatise (通论) 之后向量学在各国的发展

我们在这里要来谈的发展, 其特征可以这样来简短地表述: 那由物理学家的理解方式与 Graßmann 的理念相结合的产物, 看起来时而好像是受一方面的影响更大, 时而又好像是受另一方面的影响更大.

在这里我们首先要谈一谈 J. W. Gibbs 的工作, 而且在本书此前尚未谈到过美国数学家, 所以我们要来稍稍详细地追述一下.

美国对纯粹数学有自己独立的贡献以来还不到五十年. 第一个开启这一贡献的是天文学家 Benjamin Peirce 在 1870 年做出的, 这一年他向华盛顿国家科学院提出了他的报告 "Linear Associative Algebra (线性结合代数)", 在这份报告中他探讨了多重复数 (mehrgliedriger komlexer Zahlen) 各种可能性应受到的限制. 美国天文学的光辉兴起, 正如由 Newcomb 和 Hill 的名字所宣示的, 也要归功于他的教学活动. 美国在一个很长的年代里仍然是一个数学进口国, 不论是那里的年轻的数学家为了跟我们学习而来到欧洲, 还是把我们这里的个别的数学家请到他们那里去. 特别是在 1876 — 1883 年 Sylvester 被请到位于 Baltimore 新成立的 John Hopkins 大学任教, 影响格外大. 此外他还在那里创办了第一份美国主流数学杂志, *American Journal of Mathematics*. 这里我们再举几个数据: 1891 年纽约数学协会成立, 它不久就扩大成 "American Mathematical Society (美国数学学会)", 此外与 1893 年的 Chicago (芝加哥) 世界博览会联结在一起的还有一届数学家代表大会[1], 还有, 自 1900 年以后就有了自己的数学学会的 "Transactions (会刊)". 我们从这些所述的内容可以看到, 系统地掌握欧洲科学, 结果带来了数学上的独立自主性不断深入的发展, 促使他们今天的美国能够与古老的文明国家并驾齐驱.

但是我们上面所提到的只不过是对外显得比较突出的几个决定性的时机. 我们现在要来特别谈的 J. W. Gibbs 这个人, 他几乎是在隐居的条件下默默地成长起来的. 他曾于 1866 — 1869 年间在欧洲学习, 特别是在 1868 — 1869 年间在 Heidelberg (海德堡) 师从 Kirchhoff 和 Helmholtz. 除此之外, 他的一生 (1839 — 1903) 都是在自己的故乡 Connecticut (康涅狄格) 州度过的. 到 1873 年才第一次发表了他的两篇 (关于热的力学理论中相图的) 论文, 这随后就导致了在 1876 年及 1878 年的重要的论文 "On the Equilibrium of Heterogeneous Substances (论多相物质的平衡)", 它后来就成了物理化学的主要基础[2]. 在向量分析方面, 他最初在 1881 年及 1884 年为他 (在 New-Haven 大学) 的学生编写了一本入门教材, 后来 (1901) 由 Wilson

---

[1] 在那次会议上提交的论文集中所包含的外国人, 特别是德国人的名字还是占多数. 我那次所做的报告以 "The Evanston Colloquium (Evanston 报告)" 的标题在 1894 年发表了. 见 F. Klein, 全集, 第 2 卷, 5 页.

[2] 见本书第一卷, 242 页 (中译本 205 页).

加以扩充作为正式的教科书出版. 在他去世前不久, Gibbs 还发表了他在统计力学方面的著作. Gibbs 写的所有的东西内容都是非常成熟, 而且极有条理. 所以他一开始就感受到被 Graßmann 的延伸学的严密的一环扣一环的逻辑所吸引就毫不奇怪了. 于是就导致他与四元数专家们多次的讨论, 而他就是在他们的传统中成长起来的[1].

Gibbs 对向量分析的表述, 其影响所及远远超出了物理的范围, 他实际上把那个 (有四项的) 四元数的概念抛在了一边, 从开始就是与 (三维空间的) 向量打交道. 因此他就对 Hamilton 的一般线性向量函数, 因而也就是我们的一般双线性表达式 $\sum \alpha_{ik}x_iy_k$, 给予特别的关注. 一个这样的双线性型有可能分解为两个双线性型之积: $\sum b_ix_i.\sum c_ky_k$, 于是 Gibbs 把它们称为并矢 (*Dyade*). 在他看来, 首先先建立一个 "并矢计算术", 再把一般的双线性型, 此后他就把它们称之为 "并矢式 (Dyadic)", 理解为各种并矢之和. 显然, 并矢对应于这样一种双线性型, 它的矩阵

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

所有的子行列式都为零. 我不能再往下多讲了.

在英国 Heaviside 所完成的工作与 Gibbs 在向量分析中所采取的形式基本上一样[2]. Heaviside 是物理学家中第一个以将 Maxwell 电磁理论富有成果地应用于许许多多的具体问题而闻名于世; 此外以 Maxwell 命名的电磁场的微分方程, Maxwell 本人只是用文字表述了, 第一次用显式的形式把这组方程写出来的也是他. 出自电报工程师的世家, 后来又以自由职业者的身份为生, Heaviside 绝不会染上智力苍白的毛病, 相反, 只要他认为有必要, 他就会带着幽默回到健全的理智上来. 所以这样一来他所叙述的向量分析, 有时会插入一些唇枪舌剑的辩论, 读起来非常有趣. 在德国已找到的第一本独立讲述向量学的著作也与 Heaviside 有关. 这就是 A. Föppl 的《涡旋场的几何学》(1897), 它是同一作者所著的《Maxwell 理论导论》(1894) 一书中所讲得不足的有关内容的详述. 稍后在这两本书的基础上就诞生了由 Abraham 增订的、两卷本的《电学理论》一书, 它们至今仍然是这一领域中广为流行的教科书[3]. 与此同时向量分析就以这样或那样的形式深入到了几乎所有的数学物理或力学的教科书中. 此外还出来了大量专门为此而写的小册子; 在此我来按字母的顺序

[1] 详见 The Scientific Papers of J. Willard Gibbs (J. W. Gibbs 科学论文集) 两卷集, London 1906.

[2] 特别见 Heaviside, Eletromagnetic Theory (电磁理论) (1894), 第 1 卷, 132 – 305 页: "Elements of vectorial algebra and analysis (向量的代数与分析纲要)".

[3] 本书后又经 R. Becker 多次增订, 中译本由杨肇燫先生按该书的第十版译出, 上海, 中华书局, 1949. —— 中译者注

点出这些作者: Gauß, Jahnke, Ignatowski, Valentiner[1]. 最近新出版的, 由 Spielrein 为工程技术人员所写的则是内容更为广泛的教科书.

我不可能对它们作细致的讲述了, 这不是我的任务. 但是我必须强调指出, 在这些书中多多少少认为, 向量学是某种与传统的解析几何, 即坐标几何, 相对立的东西, 应该独立于它来展开论述, 而且甚至可看成是坐标几何的基础. 因而这正好是与几何的不变量理论的处理相对立的, 而这种不变量处理的方法是我们所主张的, 这里坐标的采用是通过以代换群为媒介与可移动性的空间观相联系的. 这种对立的做法是在英国产生的, 在那里辩论中所表述的 "poor old Cartesian with his axes (可怜无用的老笛卡儿和他的那些轴)" 发挥了持久的影响[2].

现在我们还得来谈谈意大利的数学家了. 人们可能从一开始就以为, Graßmann 的教义一旦被人们所承认, 只要在意大利人们对几何的演绎和逻辑的推理这二者的欣赏和趣味非常普及, 那它们一定会找到知音. 这样一来就有了 Peano 在 1888 年发表的值得注意的教科书:《Calcolo geometrico secondo l' Ausdehnungslehre di H. Graßmann, proceduto delle operazioni della logica deduttiva (通过演绎逻辑的运算进行的 H. Graßmann 的延伸学第二版中的几何计算)》.

关于 "logica deduttiva (演绎逻辑)", 由于我们日常用语的多义性所导致的不确定性可以通过对不同种类的逻辑关联引进相应的公式符号来消除, 这一点我们将在稍后的一节中讲述[3]. 在此我们仅指出, Peano 在他的书中只限于三维空间, 而且为了尽可能迎合物理学家的需要, 他采用了向量这一类的记号.

于是在意大利从 Peano 学派就走出来了两位向量学的先驱: Burali Forti (在 Turin (都灵)) 和 Marcolongo (在 Neapel (那不勒斯)). 我们要感谢他们给我们带来的两本于 1909 年出版的教科书, 一本是《Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria, alla mechanica è alla fisica matematica (向量计算及其在几何, 力学, 以及数学物理等方面的各种应用纲要)》, 另一本是《Omografie vettoriale (即我们的仿射量)》. 新近这两本书被合译成法文出版, 书名为《Analyse vectorielle générale (一般向量分析)》[4].

# 第一章注释

1. 3 页: "幺模 (unimodular)" —— 即其代换行列式 $|s_{ik}| = 1$. 如果只假设有

[1] Budde 的书: 三维空间中的张量和并矢 (1913) 有较强的专著性质.

[2] 这句话原来是 Robert Ball 在 1887 年一次关于螺旋理论对刚体力学的意义的有趣的谈话中说的 (British Association, Manchester). 值得注意的是, 这些先生们, 尽管允许坐标原点具有优先的地位, 可却对使用轴很忌讳.

[3] Klein 已再也不能完成这一节了. [H.]

[4] 这期间又出版了: Marcolongo: Relativitá (相对论), 1923. 又见第三章的附注 1. (H.)

$|s_{ik}| \neq 0$, 那么从算术的理由考虑, 最好将不变量的概念加以推广; 把所有的多项式 $J(x_1, \cdots, x_n)$ 看成是不变量, 借助 (1) 式, 它们满足条件:

$$J(x_1, \cdots, x_n) = J(x'_1, \cdots, x'_n) \cdot |s_{ik}|^p \quad (p \geqslant 0,\ p \text{ 为整数}).$$

因而只有在 $|s_{ik}| = 1$ 才能得到最贴切的不变量定义 $J(x) = J(x')$. 对共变变量 (*Kovarianten*) 和同步不变量 (*Simultaninvariant*) 也照此处理. 如果将 $(x), (x')$ 理解为 $n$ 维空间中点的笛卡儿坐标, 并且把 (1) 式看成是在这个空间中的点变换, 那么我们特别有, 一个 $n$ 维多面体的体积作为它的顶点坐标的函数, 是一个对 (1) 式的同步不变量 (见 §3); 在变换 (1) 式下要乘以 $|s_{ik}|$, 因而也只有在 $|s_{ik}| = 1$ 时才保持不变. 因此人们也把幺模代换称之为 "保容积 (inhaltstreue)" 变换 (见 W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie (微分几何讲义) II, Berlin 1923).

2. 5 页. 这一做法绝非一时之举; 而是一种将 $n$ 次型与线性型的 $n$ 次幂相比较的方法, 是这个理论的最重要的一种方法; 它导致了符号演算 (*symbolischen Kalkül*) (见前引 Weitzenböck, 2 页). 所以编者想更详细地解释一下.

设 $S$ 为由 (1) 式诱导出的 $a_{ik}$ 的一般代换矩阵:

$$\begin{pmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{N1} & \cdots & S_{NN} \end{pmatrix} \left(N = \frac{n(n-1)}{2}\right).$$

$T$ 为当人们将 $(u)$ 按逆步于 $(x)$ 来做代换时 $u_i u_k$ 的代换矩阵: 需要证明的是 $S = T$.

为此我们注意到, 这个 $u_i u_k$ 除了按 $T$ 代换外, 也一定能按 $S$ 来代换; 它们就是可能的数组 $a_{ik}$ 之一. 于是我们有 $u_i u_k = T(u'_i u'_k) = S(u'_i u'_k)$. 通过相减我们就得到了 $N$ 个如下形式的方程[1]

$$\begin{aligned} 0 = (S_{l_1} - T_{l_1}) u_i'^2 + (S_{l_2} - T_{l_2}) u'_1 u'_2 \\ + (S_{l_3} - T_{l_3}) u_2'^2 + \cdots + (S_{l_N} - T_{l_N}) u_N'^2 \quad (l = 1, \cdots, N) \end{aligned}$$

如果不是 $S = T$, 则在这些方程中必有一个, 其中不是所有 $u'_i u'_k$ 的系数均为零; 这实际上就表示在这些 $u'_i u'_k$ 之间存在一个线性关系, 因而也就是在 $u'_i$ 本身之间存在一个二次方程, 这就与 $u'_i$ 是独立变量相矛盾.

3. 7 页: 因而如六个数 $p_{12}, \cdots, p_{34}$ 满足方程 $P = 0$, 则必有这样的八个数 $x_1, \cdots, x_4, y_1, \cdots, y_4$, 使得有 $p_{12} = x_1 y_2 - x_2 y_1$, 等等. 证明见附注 5.

4. 10 页: 这是一个既在不变量理论中, 又特别是在几何中非常有用的方法. 由量丛的分量所经过代换的线性和齐次性可以推得:

---

[1] 这里原文中 $S, T$ 的下标均写成 $l_i$ 的形式, 疑有误, 今更正. —— 中译者注

a) 如果一量丛的 (所有) 分量在任某一坐标系中为零, 则它恒等于零 (即它的全部分量在每一坐标系中均为零).

b) 如果按照矩阵相加的法则将同步量丛相加, 则其和是与相加项同步的量丛, 因此人们 “许可” 量丛相加, 类似地也 “许可” 将量丛与常数或不变量相乘.

由 a) 和 b) 得出: 如在某一特定坐标系 $S_0$ 中两同步量丛的分量相同, 则在任一坐标系中均如此; 这样一来, 如果有两个量丛在 $S_0$ 中的分量之差为零, 则这个差就恒等于零. 这两个量丛就相等.

因此正如在正文所述, 为了建立量丛之间的方程, 总是要找这样一种坐标系做基础, 使得量丛在其中的分量有最简单的值.

5. 10 页: 在附注 3 中所表述的结论的证明如下:

如果 $p_{ik}$ 不全为零, 则它就画出一条直线: 数 $x_1, \cdots, x_4, y_1, \cdots, y_4$ 应为这条直线上的两个点的齐次坐标. 这两个点还应该是这条直线上的不同的点; 我们可以将它们适当地选在两个坐标平面上. 于是令 $x_2 = 0, y_1 = 0$, 那么我们得满足下述方程:

$$\begin{aligned} p_{12} &= x_1 y_2, \quad & p_{23} &= -x_3 y_2, \\ p_{13} &= x_1 y_3, \quad & p_{24} &= -x_4 y_2, \\ p_{14} &= x_1 y_4, \quad & p_{34} &= x_3 y_4 - x_4 y_3. \end{aligned}$$

取 $p_{12} \neq 0$ (否则我们就可以挑选另一组坐标平面). 令 $x_1 = 1$, 这时那五个尚未定的 $y_2, y_3, y_4, x_3, x_4$ 最终就可以由上述头五个方程唯一地来决定. 最后一个方程由于 $P = 0$ 自行满足.

如果所有的 $p_{ik}$ 都等于零, 则要求 $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ 显然就可以用任意的 $x_i$, 再配上一个任意的 $\nu$, 并令 $y_i = \nu x_i$ 来满足.

6. 15 页: 如果能证明表达式 $D', D'', \cdots$ 为不变量, 则由附注 4 所阐述的原理就可以导出 $n = 4$ 时的一般定理; 这一点借助于行列式乘法定理很容易验证.

7. 15 页: 这里 “基础” —— 即限制在保持这些 $f$ 不变的代换之下.

8. 20 页: “连续性思想” —— “Hesse–Klein 转换原理 (Übertragungsprinzip)” 就是以此为基础的. 把一形式的系数以及一量丛的分量理解为一新的空间, “形式的空间” 中的坐标. 那么原始空间中的每一个点变换就对应有这个形式的空间中的一个点变换. 这样我们就得到了一个几何图像的 “诱导代换”. 采用这个方法做出了富有成果的研究工作的有, 例如, P. J. Myrberg 的论文: 多个变量的自守函数的研究, Acta math. 46, 215–336 页,1925.

9. 22 页: 对称量丛与反对称量丛的区分有基本的意义. 它表明, 一般类型的线性量是可加的, 甚至在一般情况下可以由对称的、反对称的等量丛组合而成, 它们由某种一般性的排列规则来标志; 所有这些规则都是真正的量丛性质, 与坐标系无关. 见: B. v. d. Waerden: 不变量理论的恒等式. Math. Ann. (数学年刊) 95, 1926.

10. 26 页: Klein 对几何的表述及计算始终保持着活跃的兴趣, 而且多次在他的文章和讲义中以一种辩论的口气来谈论射影几何的价值, 谈论 Erlangen 纲领, 谈论向量的书写方式以及类似的东西.

编者以为, 可以将本书中有关这方面的大部分内容加以压缩, 因为相对论与微分几何的形式发展已超出了 Klein 所预见的状态.

删去了这一部分文稿的最后一节: “§8 统一向量记号的现代研究”. §1, §2 大大缩短了. §3 原来是跟随在 §6 之后的. 这种安排完全只是在讲学的自由形式范围之内, 本书就是从这些讲演中成长出来的.

11. 33 页: 关于 §4, §5. 自从有了广义相对论的渗透, 用语已经发生了变化, 因为通过它 Ricci 算法已经受到了比先前更为强烈的关注; 向量, 张量等等这样一些概念已不再仅限于正交群, 而是通过 Ricci 算法进入了一般点变换的微分几何学. 像在 §4, §5 中那种对不变量, 向量和张量的计算方法从 Ricci 算法看来也简单得多. 参见第三章注释 1.

12. 36 页: 推导: $\lambda_{ik}$ 对 $x_iy_k - y_ix_k = p_{ik}$ 是逆步的. 因为根据 15 页公式 (13′) $\sum p_{ik}^2$ 是不变量, $p_{ik}$ 的代换是正交的. 因此按照 34 页的推理方式 $\lambda_{ik}$ 对 $p_{ik}$ 也是同步的, $\sum \lambda_{ik}^2$ 和 $\Lambda$ 实际上是不变量, 并且 $\lambda_{ik}$ 的代换是正交的.

# 第二章

# 力学与数学物理中的狭义相对论

我们开始要来谈应用了, 这些应用是上一章简单介绍过的理论新近在力学与数学物理中所开发出来的. 在此我们要对物理学家的流行用语做出让步, 也就是始终不再讲相对于一给定的线性的 (后来还有非线性的) 代换群的不变量理论, 而是讲一个群的相对论. 事实上, 当我们追究事物的根本时,“相对论” 这个词总是理解为相对于一个给定的群来讲的, 而只是由于我们语言的不够准确, 从而有时连有些著名的作者也会这样来理解, 以为它只不过是把运动理解某种 “相对的东西”.

在我们转向本章的主角, *Lorentz 群的相对论* 之前, 我们必须晓得, 从力学 (特别是天体力学, 人们已经把它看成是一切数学物理的起点) 的一开始, 即从 Galilei 和 Newton 奠定它们的基础开始, *Lorentz 群的退化形式*是怎样以适当的方式表现出来的. 自然人们原来并不知道这一点. 现在我们在事后以适合于我们所熟悉的群论观点来处理天体力学中的某些主要定理, 那将是很吸引人的事.

## A　经典天体力学与 Galilei–Newton 群的相对论

### §1　从 $n$ 体问题的微分方程看群的定义和意义

在此我们不打算从讨论惯性定律 (它是 Galilei 大约在 1602 年建立的) 来开讲, 也不打算从讨论 Newton 的万有引力 (《Philosophiae naturalis principia mathematica (自然哲学的数学原理)》, 1687) 来开讲, 而是直接就从中间插进来讲. $n$ 体问题的微分方程, 正如人们在所有的教科书中所找到的, 它们是:

$$\text{I}\left\{\begin{aligned}\ddot{x}_i &= \kappa^2\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{x_k - x_i}{r_{ik}^2},\\ \ddot{y}_i &= \kappa^2\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{y_k - y_i}{r_{ik}^2}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n).\\ \ddot{z}_i &= \kappa^2\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{z_k - z_i}{r_{ik}^2},\end{aligned}\right.$$

这里 $\kappa^2$ 是所谓引力常数:

$$\kappa^2 = 6\ 675 \cdot 10^{-8}[\text{cm}^2 \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{sec}^{-2}].$$

我们马上来着手探讨这些方程如下的问题: 它们在变量 $x, y, z, t$ 的怎样的线性代换下保持不变.

对物理学家来说, 也许最自然的是从所谓量纲的考察来开始. 方程 I 在下述 "相似变换 (Ähnlichkeitstransformation)"

$$x_i' = \lambda^2 x_i, \quad y_i' = \lambda^2 y_i, \quad z_i' = \lambda^2 z_i, \quad t' = \lambda^2 t \tag{1}$$[1]

下保持不变, 而且人人都知道, 这在所谓 Kepler 第三定律 ("行星运行周期的平方正比于轨道长半轴的立方") 上是如何得到明示的. 可是它也表明, 就是这个设定变换 (1) 式无法再做进一步的推广, 而只要它还显得是这样, 我们在以后就可以把它放在一边不管.

但是显然还有一些变换能使我们的方程保持不变, 它们是:

a) 坐标系 $(x, y, z)$ 的一个任意的平移:

$$x_i' = x_i + \xi_1, \quad y_i' = y_i + \xi_2, \quad z_i' = z_i + \xi_3, \tag{2}$$

b) "围绕坐标原点的转动", 或还有它们在 "保持原点不动时的翻转", 也就是其行列式为 +1 或 −1 时的正交代换:

$$\left\{\begin{aligned}x_i' &= \alpha_1 x_i + \beta_1 y_i + \gamma_1 z_i,\\ y_i' &= \alpha_2 x_i + \beta_2 y_i + \gamma_2 z_i,\\ z_i' &= \alpha_3 x_i + \beta_3 y_i + \gamma_3 z_i.\end{aligned}\right. \tag{3}$$

c) 但是除此之外还有含 $t$ 的代换, 即下述平常的操作:

$$t' = \pm t + \xi_4 \tag{4}$$

和下述代换:

$$x_i' = x_i + \varepsilon_1 t, \quad y_i' = y_i + \varepsilon_2 t, \quad z_i' = z_i + \varepsilon_3 t, \tag{5}$$

[1] 这里原文为 $t' = \lambda^3 t$, 疑有误, 今更正. —— 中译者注

这个代换意味着坐标系 $(x, y, z)$ 随时间匀速地向前作平行移动 (而在变化 (2) 式, (3) 式中时间根本不参与进去; 要想用简短的话把这里的原则性的差异讲清楚, 我们的语言又显得笨拙无力了).

这里公式 (2) 和 (3)(它们每一个都含有三个独立参数) 合在一起就给出了那个 $G_6$, 近来人们称它为 *Euklid* (欧几里得) 群, 也就是 $(x, y, z)$ 坐标系的所有全等变换的总体. 通过对 (4) 式和 (5) 式进行运算, 就可以把它们扩大成一个 $G_{10}$, 而这个 $G_{10}$ 人们就称其为 *Galilei–Newton* 群. 具体的做法就是, 记住下述矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

是一个正交矩阵, 那么它们就可以通过下述方程组给出:

$$\text{II}\quad \begin{cases} x_i' = \alpha_1 x_i + \beta_1 y_i + \gamma_1 z_i + \varepsilon_1 t + \xi_1 \\ y_i' = \alpha_2 x_i + \beta_2 y_i + \gamma_2 z_i + \varepsilon_2 t + \xi_2 \\ z_i' = \alpha_3 x_i + \beta_3 y_i + \gamma_3 z_i + \varepsilon_3 t + \xi_3 \\ t' = \pm t + \xi_4 \end{cases}$$

但是对这一有十个参数的群的内在意义, 我们立即想用语言来表达一下, 这就是, 从经典天体力学 (方程 I 是它的最纯粹的表达) 只能获得太阳系的这样一些性质, *它们相对于这个群是不变的*. 这一点, 仅就 Euklid 群而言, 几乎从来就不感觉是什么特别的认识. 而代换 (4) 式和 (5) 式则总是有许多有趣的东西. 比如我们可以改变 $t$ 的符号, 人们称此为运动的 "可逆性 (Reversibilität)": 我可以将过去与未来互换; 设想在某一瞬时将所有的速度反转过来, 则物体就会严格地沿着与原来的运动完全相反地运动. 人们已经多次把下面那句话与代换 (5) 式联系起来: "太阳系的重心以一个未知的速度向着未知的方向做匀速运动". 谈起匀速移动, 正是由于代换 (5) 式, 我们说不出有任何绝对的运动来.

匀速转动则完全是另外一回事. 像下面那样的正交变换:

$$x' = x\cos\psi + y\sin\psi, \quad y' = -x\sin\psi + y\cos\psi,$$

其中 $\psi$ 与 $t$ 成正比, 恰好不出现在我们的群中.

我还要顺便谈一下另一点. 人们把遵从 I 式的引力作用, 对比于通过空间媒体传递的近 (媒递) 作用 (Nahwirkung), 称之为 "远 (超距) 作用 (Fernwirkung)". 这实际上意味着把它的外在的表现形式看得过重了. 譬如我把 I 式改写成 (在此我尽可能写得简短些):

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \text{ 等等},$$

这样一来此处出现的势能[1]

$$U = -\kappa^2 \sum_{ik} \frac{m_i m_k}{r_{ik}} \tag{6}$$

中的每一项都可以解释为一偏微分方程 $\Delta = 0$ 的“基本解 (Grundlösung)”. 在我们把偏微分方程拉出来的同时, 就到了近作用理论的领域. 这不是在逻辑基础上有什么变化, 而是在心理上相伴的观念发生了改变. 这对某些目的, 例如, 对实验工作者或制造技术人员, 非常有必要, 但在抽象数学的意义上来讲, 什么也没变.

对于方程组 I 来说真正重要的, 我们认为, 毋宁说是, 在它们里面时间 $t$ 不明显地出现, 它们所反映出来的引力是一种“瞬时作用 (Instantwirkung)”, 它只与系统地瞬时位形有关, 看来不是“推迟作用 (retardierte Wirkung)”. 这是一个矛盾, 关于它下面我们还会反复谈到.

变量 $t$ 从 Galilei–Newton 群 II 中已经可以看出, 扮演了一个特殊的角色. 为了直观起见, 我们把 $x, y, z, t$ 解释成是一个四度延伸的空间中的一个点; 在这个空间里那无穷多个 $t = \text{const}$ 的单一三维空间族“一层叠一层地堆叠在一起”. 今后我们将不再把我们的群中的代换理解为空间坐标系的变换, 而是把它们看成是在坐标系保持不变的情况下空间自身的变换. 因此任意一点 $x, y, z, t$ 无疑都有可能转变到任一其他的点 $x', y', z', t'$, 但是 $t = \text{const}$. 这个流形在此变换下只变到自身, 就好像一本书的一页没有改变页码 (必要时也可以反转) 时那样. 这个群是*传递的* (*transitiv*), 但它不是*本原的* (*primitiv*). 这样一来我们这个空间就有了一个特殊的性质. 在所有的变换下 $(t_1 - t_2)^2$ 保持不变. 如果在特殊情况下一开始就等于零它就保持为零: *两个点之间的同时性的概念相对于这个群有某种绝对性.*

不难理解, 这里谈的这些简单的情况, 只是为了讲对此有偏离关系的 Lorentz 群做准备. 此外, Galilei–Newton 群中的变量 $t$ 拥有特殊的地位, 这一点对力学的历史发展肯定起了阻碍的作用. 尽管 Lagrange 已经把力学当成一个四维的几何, 但是直到新近人们才应用了这个观点. 所有老一代的作者眼睛里只有 Euklid 群, 而对于变换 (4) 式和 (5) 式, 尽管他们也知道它们, 则认为它们跟他们没有什么关系. 因此在写我的 Erlangen 纲领的时候, 它们也从我的眼皮底下溜走了. 我还清楚地记得, 我当时并不是没有看到 Lagrange 的指示, 但是我未能把它们纳入到我的群原理中去[2]. 只是在 Lorentz 群出现之后数学家才得出了对 Galilei–Newton 群的正确评价. 还有一个极其值得注意的事情, 我们要用一个特别的例子来厘清.

---

[1] 这里原文将下式中的 $\kappa$ 误印为 $k$. —— 中译者注

[2] 我还清清楚楚记得, 从前我总是忽视那个 (它本身完全是平凡的) 代换 $t' = t + \xi_4$, 于是对我就产生这样的印象, 即它处理的是 $x, y, z, t$ 空间中的一个不可传递的群! 因此这样就自然建立不了一个真正的 $R_4$ 的几何.

## §2 关于经典力学 $n$ 体问题的 10 个通积分

在 Jacobi 的动力学讲义中 (1842 — 1843 年在 Königsberg 讲授, 1866 年由 Clebsch 编辑出版, 全集, 补遗卷, Berlin, 1884) —— 我在这里援引它是因为它是大多数现代表述的典范, —— 一个接一个地推导了微分方程组 I 的 10 个通积分, 第一个推导的就是质心运动守恒这个几通积分, 接下去讲的是活力[1] 的积分, 最后讲的是面积守恒这个积分.

因此我们首先有的就是三个一次质心运动积分 (即 "冲量定律"), 我把它们写成

$$\sum m_i\dot{x}_i = A_1, \quad \sum m_i\dot{y}_i = A_2, \quad \sum m_i\dot{z}_i = A_3. \tag{7}$$

通过对上式直接积分就可导出三个二次质心运动定律:

$$\sum m_i x_i = A_1 t + B_1, \quad \sum m_i y_i = A_2 t + B_2, \quad \sum m_i z_i = A_3 t + B_3, \tag{8}$$

接下来就是能量守恒定律:

$$T + U = h \left(\text{其中 } T = \frac{1}{2}\sum m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \text{ 以及 } U = -\kappa^2 \sum \frac{m_i m_k}{r_{ik}}\text{[2]}\right). \tag{9}$$

最后是三个面积定律, 我也同样把它们详细写出来:

$$\begin{aligned} \sum m_i(y_i\dot{z}_i - z_i\dot{y}_i) &= C_1, \\ \sum m_i(z_i\dot{x}_i - x_i\dot{z}_i) &= C_2, \\ \sum m_i(x_i\dot{y}_i - y_i\dot{x}_i) &= C_3. \end{aligned} \tag{10}$$

Jacobi 对这些定律的推导只有一部分在现代的观点下是系统化的, 这就是指方程 (7) 和 (10), 靠它们提取出了*无穷小变换*, 它们包含了 Euklid 群. 通过总是用字母 $\delta$ 来表示无穷小的增量及无穷小常量, 则我首先有无穷小平移为:

$$\delta x = \delta\xi_1, \quad \delta y = \delta\xi_2, \quad \delta z = \delta\xi_3,$$

其次有无穷小转动为:

$$\left.\begin{aligned} \delta y &= z\cdot\delta\varphi \\ \delta z &= -y\cdot\delta\varphi \end{aligned}\right| \left.\begin{aligned} \delta z &= x\cdot\delta\chi \\ \delta x &= -z\delta\chi \end{aligned}\right| \begin{aligned} \delta x &= y\cdot\delta\psi \\ \delta y &= -x\cdot\delta\psi \end{aligned}.$$

这些坐标的无穷小增量 Jacobi 是作为虚位移引入定律的, 并且正好由此获得了方程 (7) 和 (10). 而方程 (8) 和 (9) 自然就非常简单地通过例行的积分来得到,

[1] 能量的概念最初被称为活力, 在 Klein 的时代, 它还与能量这个词同时被人们所采用. ——中译者注

[2] 这里原书将 $\kappa^2$ 误印为 $k^2$. —— 中译者注

但是它们就是看成与方程 (7) 和 (10) 相并立的独立的事物, 而不是被看成与之紧密相连的东西.

与之对立的是, Lorentz 群的研究带来了原则性的重大进展, 使得能量方程 (9) 必然与第一质心运动定律联系到一起了, 而第二质心运动定律则会与面积定律[1]联系到一起, 相应的无穷小变换就是 Galilei–Newton 群中超出 Euklid 群的那一部分. 而且更有甚者, 我们还要把活力积分与下述无穷小变换

$$\delta t = \delta \xi_4$$

相关联, 而与第二质心运动定律相关联的却是下面三个无穷小变换:

$$\delta x = t \cdot \delta \varepsilon_1, \quad \delta y = t \cdot \delta \varepsilon_2, \quad \delta z = t \cdot \delta \varepsilon_3.$$

这些合乎我的期望的事最近已经由 Engel 以直接的方式完成了[2]. 遗憾的是, 我不可能在这里复述 Engel 的这一开创性的工作, 因为这样就会离题太远, 必须要去谈 Lie 对这些方程组的积分方法, 而这又必须谈到某些变换的连续群. 在当下的讲述中我们必须局限于: 1. 在很后面来验证, 当我们把 Galilei–Newton 群看成是 Lorentz 群的极限情形时, 就会得出这里所讲的观点, 2. 在此来验证, 根据代换 (5) 式实际上在面积定律与第二质心运动定律之间就会有一个关系能成立.

至于目前要来谈的活力, 那么 Ignaz Schütz 在一篇发表在 1897 年的 Göttinger Nachrichten 上的、令人瞩目的短文 (它的标题是: 能量绝对守恒原理) 中, 已经叙述了我们这里所讲的联系. 在下述公式中

$$\frac{1}{2}\sum m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + U = h$$

将 $x, y, z$ 代换为 $x + \varepsilon_1 t, y + \varepsilon_2 t, z + \varepsilon_3 t$, 并要求新的和

$$\frac{1}{2}\sum m_i((\dot{x}_i + \varepsilon_1)^2 + (\dot{y}_i + \varepsilon_2)^2 + (\dot{z}_i + \varepsilon_3)^2) + U$$

对任意的 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 也同样为常量, 则三个一次质心运动定律 (冲量定律):

$$\sum m_i \dot{x}_i = A_1, \cdots, \cdots$$

就会自动地成立. 现在我们用同一方法于面积定律:

$$\sum m_i(y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) = C_1, \text{ 等等.}$$

于是得到等式左边的补充项为:

$$\varepsilon_3\left(\sum m_i y_i - t\sum m_i \dot{y}_i\right) - \varepsilon_2\left(\sum m_i z_i - t\sum m_i \dot{z}_i\right), \cdots, \cdots,$$

[1] 见 Herglotz 的报告, Ann. d. Phys. (物理年刊) (4), 第 36 卷, 1911, 512—513 页 (论可变形物体及其他物体的力学).

[2] Gött. Nachr. (哥廷根通报), 1916, H. (册) 2.

尽管左边有了补充项, 我们再次要求它等于常量 (不论 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 如何选择). 这就给出了如下形式的方程[1]:

$$\sum m_i x_i = t \sum m_i \dot{x}_i + B_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

而且如果在此还将 $\sum m_i \dot{x}_i$ 用它们在第一质心运动定律中的值代入, 我们就得到了二次质心运动定律, 这正是我们要证明的.

这个进步超出了 Jacobi 的表述是显然的. 人们会提出这样的挑战: 是不是有人也许能够发展出 Galilei–Newton 群的一个系统的不变量理论 (相对论), 就像 Burkhardt 的工作曾经能有机会对齐次正交群所做过的说明那样 (第一章, B, §6). 这里我们把 Study 以及 Weitzenböck 的工作也包括在内[2]. 自然, 不会有人期望能由此对 $n$ 体问题的实际处理会有什么改变. 不过人们也许能够得到对基本假定的内在适当性以及有关变量选择的了解, 就像人们从先前遇到过的情形中所感知到的.

# B Maxwell 电动力学和 Lorentz 群的相对论

像在上面 A 篇中那样, 我们仍然不去作通常那样的广泛讨论而是把一最简单的微分方程放到首位, 然后再来追问, 对在其中出现的变量作怎样的线性代换才能使这些方程保持不变. 总的来说, 我们的讨论 —— 包括我们所引用的一些历史性的评论也在内 —— 主要是数学类型的, 与物理的关系也只是在方向和兴趣上的. 也许这样形成的叙述由于其思路的统一性, 恰好符合物理学家的口味.

## I 导 论

### §1 自由以太的 Maxwell 方程组

关于 Maxwell 本人我们已经在第一卷的第 5 章中详细地谈过了, 并且在那里还特别地指出了, 自由以太的 Maxwell 方程组 —— 它将是我们这新的一章全部铺叙的起点和基础 —— 从数学的观点来看, 与 Mac Cullagh 在 1839 年所建立的方程组是一致的, 这是他为他所虚构的光学介质, 在取其为各向同性时, 所建立的一组方程. 我们在此写下这组方程, 其形式是 Heaviside 和 Hertz 所赋予的.

---

[1] 这里原文将下述方程印为: $\sum m_i x_i = t \sum m_i x_i + B_1$. —— 中译者注

[2] Study, E.: Geometrie der Dynamen (动力学的几何学), Leipzig 1903. —— Weitzenböck, R.: Über Bewegungsinvarianten (论运动不变量). Wiener Sitzungsberiichte (维也纳会议文集) 1913 及以后.

Heaviside 采用的是向量写法. 两个向量场, 它们的载体是以太, 分别是: 电 (场) 向量 $E$[1] 和磁 (场) 向量, 按照 Maxwell 的记号, 记为 $H$[2], 于是就通过下述方程组相互联系:

$$\text{a)}\ \frac{\dot{E}}{c} = \text{curl}\ H, \quad \text{b)}\ \frac{\dot{H}}{c} = -\text{curl}\ E,$$

和它们在一起, 与它们相容的, 还有一对散度条件方程

$$\text{a)}\ \text{div}\ E = 0, \quad \text{b)}\ \text{div}\ H = 0.$$

Hertz 采用了把分量都写出来的详尽的方式, 考虑到要进行个别具体的计算, 我们在此接着来讲一下. 他为此采用了一个左手坐标系. 令 $X, Y, Z$ 为电 (场) 向量, $L, M, N$ 为磁 (场) 向量. 于是我们就有了两列方程组, 每列都有四个方程:

$$\text{I}\begin{cases} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial X}{\partial t} = \dfrac{\partial M}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial y}, \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial Y}{\partial t} = \dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial z}, \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial Z}{\partial t} = \dfrac{\partial L}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial x}, \\ 0 = \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z}{\partial z}, \end{cases} \qquad \text{II}\begin{cases} -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial L}{\partial t} = \dfrac{\partial Y}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial y}, \\ -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial M}{\partial t} = \dfrac{\partial Z}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial z}, \\ -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial N}{\partial t} = \dfrac{\partial X}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial x}, \\ 0 = \dfrac{\partial L}{\partial x} + \dfrac{\partial M}{\partial y} + \dfrac{\partial N}{\partial z}, \end{cases}$$

但是每一列中四个方程之间的关系写出来就是:

$$\frac{\partial(\ )}{\partial x} + \frac{\partial(\ )}{\partial y} + \frac{\partial(\ )}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial(\ )}{\partial t}. \tag{1}$$

在 I 和 II 中我们可以看到, $X, Y, Z$ 和 $L, M, N$ 出现于其中是相互协调地配合着的. 但这仅限于对自由以太的方程. 因此我们不会广泛地采用这一相互协调地配合.

我们还要在这里写下几个简单的公式, 它们是在我们想通过对 I 和 II 的微分来消去磁 (场) 向量或电 (场) 向量时得出的 (见第一卷, 244 页[3]). 为此我们将根据 Cauchy 的建议提出一个在下面将经常出现的算子

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \square. \tag{2}$$

于是我们就求得了电 (场) 向量所满足的方程组, 它们在传统光学中是众所周知的:

$$\square X = 0, \quad \square Y = 0, \quad \square Z = 0; \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \tag{3}$$

---

[1] Electrician (电工).

[2] 我不怀疑, Maxwell 在选择这两个记号时是想与希腊字母 Epsilon ($\varepsilon$, 其大写为 E) 和 Eta($\eta$, 其大写为 H) 相互对照. 于是由 Eta 及其对应的英文字母 Etsch 就变成了我们的物理学家的德文字母 $\mathfrak{H}$.

[3] 中译本 206 页. —— 中译者注

自然对磁 (场) 向量同样有:

$$\Box L=0,\quad \Box M=0,\quad \Box N=0;\quad \frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=0. \tag{4}$$

但是要拿我们考察至今所遵循的思路来问:

*是不是有 $x,y,z,t$ 的以及 $X,Y,Z,L,M,N$ 的这样的线性代换, 使得我们的方程组在这种代换下保持不变?*

算子 $\Box$ 的形式给了我们第一个启发. 根据我们的不变量理论的直觉, $\Box$ 是下述微分表达式的伴随形式[1]:

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2. \tag{5}$$

因此当我们令 $dx,dy,dz,dt$ 经过一个任意的, 但是能将方程 $ds^2=0$ 变到自身的齐次线性变换时, 每一单个方程 $\Box=0$ 都会保持不变. 在此我们也 (和先前在 Galileo–Newton 群时一样) 忽略相似变换, 而只限于 $dx,dy,dz,dt$ 的那样一些齐次线性代换, 它们保持 $ds^2$ (因而也就保持 $\Box$) 自身不变. 这是一个有六个参数的群, 当我们作 $x,y,z,t$ 的相应的线性代换时 (这时要附加四个常量), 就会得出一个有 10 个参数的群. 这就是 *Lorentz* 群, 我们就这样在此与它第一次相遇了.

但是还有问题, 这就是, 当我们令 $x,y,z,t$ 经过一个 Lorentz 群的代换时, $X,Y,Z,L,M,N$ 该如何改变的问题. 如果我们只和下面这些方程打交道:

$$\Box X=0,\quad \Box Y=0,\cdots,\quad \Box N=0,$$

那么我们还可以令 $X,Y,Z,L,M,N$ 经过它们这方面的一个任意的线性代换, 从而还会有 36 个参数进入我们的视线. 但是我们还成立有散度条件:

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0\quad 以及\quad \frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=0,$$

最后还有 Maxwell 方程组 I 和 II 本身. 其结果将是, $X$, $Y$, $Z$, $L$, $M$, $N$ 这几个量 —— 在忽略相似变换, 再次把它搁置在一边之后 —— 对应于 $x,y,z,t$ 的每一 Lorentz 代换, 必须经过它们自己这方面的一个完全确定的线性变换. 如果有人想通过直接计算 Maxwell 方程组来证明这一点, 则首先就会碰到错综复杂的计算. 但是在下一节的研究中我们将一举就达到目的, 办法就是, 我们将随同 Minkowski 一道回到 Maxwell 方程组的一个隐藏的对称性上来.

## §2 正交形式下的 Lorentz 群

我们在此一开始必须用到的技巧就在于引进一个新的变量

$$ict=l \tag{6}$$

[1] 见 15 页

来代替时间 $t$, 然后, 为了使微分方程中不出现虚数, 还要令

$$iX = U, \quad iY = V, \quad iZ = W. \tag{7}$$

于是微分表达式 $ds^2$ 以及算子 $\Box$ 就取如下的简单形式:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 + dl^2, \\ \Box &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial l^2}; \end{aligned} \tag{8}$$

*只要 Lorentz 群是作用于微分 $dx, dy, dz, dl$ 上, 那么它就简化为这些微分的正交变换.*

但是这时 Maxwell 方程组 I 和 II 写出来各项的排列一目了然, 如下:

$$\text{I}' \begin{cases} 0 = \cdot + \dfrac{\partial N}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial z} + \dfrac{\partial U}{\partial l}, \\ 0 = -\dfrac{\partial N}{\partial x} + \cdot + \dfrac{\partial L}{\partial z} + \dfrac{\partial V}{\partial l}, \\ 0 = +\dfrac{\partial M}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial y} + \cdot + \dfrac{\partial W}{\partial l}, \\ 0 = -\dfrac{\partial U}{\partial x} - \dfrac{\partial V}{\partial y} - \dfrac{\partial W}{\partial z} + \cdot, \end{cases} \quad \text{II}' \begin{cases} 0 = \cdot + \dfrac{\partial W}{\partial y} - \dfrac{\partial V}{\partial z} + \dfrac{\partial L}{\partial l}, \\ 0 = -\dfrac{\partial W}{\partial x} + \cdot + \dfrac{\partial U}{\partial z} + \dfrac{\partial M}{\partial l}, \\ 0 = +\dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial y} + \cdot + \dfrac{\partial N}{\partial l}, \\ 0 = -\dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial z} + \cdot. \end{cases}$$

现在 $L, M, N$ 和 $U, V, W$ 是完全平等地出现在其中了. 同时 I 及 II 中的四个方程之间的相互关系获得了完全对称的形态:

$$\frac{\partial(\ )}{\partial x} + \frac{\partial(\ )}{\partial y} + \frac{\partial(\ )}{\partial z} + \frac{\partial(\ )}{\partial l} = 0. \tag{9}$$

但是在 I′ 和 II′ 中毗邻着的各项安排得好像是一个反对称矩阵中的各项.

可是如果我们用下标来区分变量, 那一切就会变得更加清楚. 我们把 $x, y, z, l$ 写成 $x_1, x_2, x_3, x_4$

$$x, y, z, l \sim x_1, x_2, x_3, x_4 \tag{10}$$

并交替地用

$$\begin{array}{cccccccc} & \lambda_{14}, & \lambda_{24}, & \lambda_{34}, & \lambda_{23}, & \lambda_{31}, & \lambda_{12} \\ \text{及} & \mu_{23}, & \mu_{31}, & \mu_{12}, & \mu_{14}, & \mu_{24}, & \mu_{34} \end{array} \tag{11}$$

来表示

$$U, \quad V, \quad W, \quad L, \quad M, \quad N.$$

为了提高我们所希望的公式的灵活性, 还进一步规定:

$$\lambda_{ik} = -\lambda_{ki}, \quad \mu_{ik} = -\mu_{ki}, \quad \lambda_{ii} = \mu_{ii} = 0.$$

于是我们的公式用 $\lambda_{ik}$ 写出来就是:

$$
\mathrm{I}'' \begin{cases} 0 = \cdot + \dfrac{\partial\lambda_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial\lambda_{13}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial\lambda_{14}}{\partial x_4}, \\ 0 = \dfrac{\partial\lambda_{21}}{\partial x_1} + \cdot + \dfrac{\partial\lambda_{23}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial\lambda_{24}}{\partial x_4}, \\ 0 = \dfrac{\partial\lambda_{31}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\lambda_{32}}{\partial x_2} + \cdot + \dfrac{\partial\lambda_{34}}{\partial x_4}, \\ 0 = \dfrac{\partial\lambda_{41}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\lambda_{42}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial\lambda_{43}}{\partial x_3} + \cdot, \end{cases} \quad \mathrm{II}'' \begin{cases} 0 = \cdot + \dfrac{\partial\lambda_{34}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial\lambda_{42}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial\lambda_{23}}{\partial x_4}, \\ 0 = \dfrac{\partial\lambda_{43}}{\partial x_1} + \cdot + \dfrac{\partial\lambda_{14}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial\lambda_{31}}{\partial x_4}, \\ 0 = \dfrac{\partial\lambda_{24}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\lambda_{41}}{\partial x_2} + \cdot + \dfrac{\partial\lambda_{12}}{\partial x_4}, \\ 0 = \dfrac{\partial\lambda_{32}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\lambda_{13}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial\lambda_{21}}{\partial x_3} + \cdot, \end{cases}
$$

而用 $\mu_{ik}$ 写出来就正好相反, 为:

$$
\mathrm{I}''' \begin{cases} 0 = \cdot + \dfrac{\partial\mu_{34}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial\mu_{42}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial\mu_{23}}{\partial x_4}, \\ 0 = \dfrac{\partial\mu_{43}}{\partial x_1} + \cdot + \dfrac{\partial\mu_{14}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial\mu_{31}}{\partial x_4}, \\ 0 = \dfrac{\partial\mu_{24}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\mu_{41}}{\partial x_2} + \cdot + \dfrac{\partial\mu_{12}}{\partial x_4}, \\ 0 = \dfrac{\partial\mu_{32}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\mu_{13}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial\mu_{21}}{\partial x_3} + \cdot, \end{cases} \quad \mathrm{II}''' \begin{cases} 0 = \cdot + \dfrac{\partial\mu_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial\mu_{13}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial\mu_{14}}{\partial x_4}, \\ 0 = \dfrac{\partial\mu_{21}}{\partial x_1} + \cdot + \dfrac{\partial\mu_{23}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial\mu_{24}}{\partial x_4}, \\ 0 = \dfrac{\partial\mu_{31}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\mu_{32}}{\partial x_2} + \cdot + \dfrac{\partial\mu_{34}}{\partial x_4}, \\ 0 = \dfrac{\partial\mu_{41}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\mu_{42}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial\mu_{43}}{\partial x_3} + \cdot. \end{cases}
$$

这两种书写方式各有各的优点. 但是对于下面即将讨论的内容来说, 我们最好还是挑选 I″ 和 II‴, 我们最后可以把它们写成如下的形式:

$$
\sum_k \frac{\partial\lambda_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad \sum_k \frac{\partial\mu_{ik}}{\partial x_k} \quad \text{对 } i = 1, 2, 3, 4. \tag{12}
$$

我们的那个定理说的是什么, 现在可以这样来讲了: 如果在 $dx_i$ 的正交变换下 $\lambda_{ik}$ 和 $\mu_{ik}$ 像一个相应的六分量张量的分量那样代换, 也就是说像两个设想的同步微分数组 $dx$ 和 $\delta x$ 构成的子行列式

$$
dx_i\delta x_k - dx_k\delta x_i
$$

那样代换, 则上述方程组中每一四个方程的一组保持不变.

证明实际上是以我们先前所发展的不变量理论为基础的. 如 $\lambda_{ik}$ 以及 $\mu_{ik}$ 均为一六分量张量的坐标, $u_k$ 为一四维向量的坐标, 则下述和

$$
\sum u_k\lambda_{ik} \quad \text{以及} \quad \sum u_k\mu_{ik} \quad \text{对 } i = 1, 2, 3, 4^*
$$

本身也是四维向量的坐标. 如果在此我们选 $u_k$ 为算子符号 $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$, 那么就立即得到了方程 (12) 的左侧. 方程 (12) 是说, 这两个由六分量张量 $\lambda_{ik}$ 以及 $\mu_{ik}$ 导出的四维向量恒等于零 (即其所有分量全为零). 而这肯定表明它们在四维向量坐标的正

交代换下是不变的. 这是因为代换对四维向量的坐标还是齐次的, 因而如果在代换前所有的坐标均为零, 那么在变换后也会如此.

这样一来整个问题在原则上就解决了; 在下节中还要处理的就只是, 将所得的结果转移到原始的变量 $x, y, z, t$ 以及 $X, Y, Z, L, M, N$ 上去[1].

## §3 返回到 $x, y, z, t$

在我们首先把 $x_1, x_2, x_3, x_4$ 再次写为 $x, y, z, l$ 之时, Lorentz 群的代换就将成为如下的形式, 其中 $|\alpha\ \beta\ \gamma\ \varepsilon|$ 为一正交矩阵:

$$\begin{cases} x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \varepsilon_1 l + \varsigma_1, \\ y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \varepsilon_2 l + \varsigma_2, \\ z' = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \varepsilon_3 l + \varsigma_3, \\ l' = \alpha_4 x + \beta_4 y + \gamma_4 z + \varepsilon_4 l + \varsigma_4. \end{cases} \tag{13}$$

现在我们在这里把 $l$ 与$l'$ 换为 $ict$ 与 $ict'$. 然后再要求这样写出来的群, 为了与物理的应用相适应, 所有的代换系数必须为实数, 所以我们认识到, 在 (13) 式中的 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, 以及 $\alpha_4, \beta_4, \gamma_4$ 必须为纯虚数.

此外我们还要按照 (11) 式给出的规则将 $\lambda_{ik}$ 换成 $U, V, W, L, M, N$, 最后还要再将 $U, V, W$ 换成 $iX, iY, iZ$. 于是我们发觉 $X, Y, Z, L, M, N$ 可取成与下述矩阵

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz & dt \\ \delta x & \delta y & \delta z & \delta t \end{vmatrix}$$

的两行两列的子行列式同步:

$$\begin{cases} X \sim c(dx\delta t - \delta x dt), & Y \sim c(dy\delta t - \delta y dt), & Z \sim c(dz\delta t - \delta z dt), \\ L \sim (dy\delta z - \delta y dz), & M \sim (dz\delta x - \delta z dx), & N \sim (dx\delta y - \delta x dy), \end{cases} \tag{14}$$

我们就此把所有关于原始 Maxwell 方程组 I 和 II 变换到自身的线性变换要讲的都讲到了.

人们会不自觉地回想起那个命题, 那是 Jacobi 有一次 (1832) 在就职正教授时所做的答辩中讲的 (见第一卷, 114 页[2]), 它在漫长的时间进程中不断地得到证实: *Mathesis est scientia eorum, quae per se clara sunt* (数学是一门自在明晰的科学). 当人们事后来考察其结果时, 的确就是这样. 不过历史的发展, 关于它们我们现在就要来讲, 却偏爱曲折的小路. 我们来从一个有关更一般的物理内容的报告来开讲.

[1] 更准确的解释自然要证明, 如果像在正文中那样同时处置 $\lambda_{ik}$ 以及 $\mu_{ik}$, 则 Maxwell 方程组中的两组四方程组仅对 $dx_i$ 的正交变换保持为不变. —— 此外将 $\lambda_{ik}$ 与 $\mu_{ik}$ 一并处置相当于我们在引进 Graßmann 层量时所讨论的那些 $p_{ik}, q_{ik}$ (第一章, A, §2); 它们在此显得是同步的, 这也是因为他们在正交代换下同步与逆步的区别消失了 [见第一章附注 12(H.)].

[2] 中译本, 91 页. —— 中译者注

## §4 谈电学和原子的概念在 Maxwell 的通论发表 (1873) 后的发展

关于 Maxwell 和他的通论我们在第一卷的第 5 章详细地讲过了.

Maxwell 在通论中从头到尾都是把他的理论建立在*唯象*的观点之上, 也就是说, 他把以太以及在考察中出现的物体看成是连续体, 在其中有一组针对电磁场的特征偏微分方程成立, 而且在不同介质的分界面上还要满足一定的边界条件. 在这一表述中最后的一环是每一个场的场源, 正好也表现在这种边界条件上.

与唯象的观点相对立的从来 (自有数学物理以来) 就是那深入的, 但在数学上很复杂的*原子论的观点*. 按照这种观点, 物质或电是由非常小的, 分立的粒子所组成. 唯象物理的偏微分方程所描写的只是这些粒子的*平均*行为, 但是存在大量这样的现象, 对这类现象这种平均值不足以描绘了, 这时人们也许对这些粒子要逐个地*追踪*了.

这两种观点在 19 世纪的发展过程中, 有时是这个, 有时又是另一个, 处于发展的前列. 在英国的数学物理中, 从 Green 到 Maxwell 都是唯象的描述方法处于统治地位. 但是毫无疑问, Maxwell 从内心来讲是一个原子论者. 还在他写通论之前, 他就以各种方式进行研究, 设想了一个精致的内部机制, 这一机制有可能成为我们宏观观察到的电磁现象的基础. 我还记得他在气体理论上的奠基性的研究工作. 尽管 Maxwell 在他的通论中无一例外地采用唯象的描述方法, 我却从他的气体理论中看到了他自觉地离去.

实际上 Maxwell 在电的原子论的观点上没有做什么事, 他不可能提出一个像 Wilhelm Weber 从前提出过的那样一个理论, 在这个理论中他令极小的带正电荷的粒子与带负电荷的粒子瞬时相互作用. 因为 Maxwell 的基本观点还是这样的, 这就是, 电磁作用的传播是需要时间的. 因此就需要一个传递作用的媒介: “以太”.

电学的进一步的发展成所谓电子论, 它不是在唯象论与原子论之间的对立进行裁决, 而是在它们之间进行调和, 这一点现在是最令人注目的事了. 人们一方面有电荷的原子性的载体, 即带负电的电子和带正电荷的原子核, 另一方面则是在自由空间中的电磁场, 它传播电荷的物质载体之间的相互作用.

这一历史我们只能在这里大略地描绘一下.

正如我们在第一卷中适当的地方提到过 (230 页[1]), 除此之外 Helmholtz 1882 年在他的 Faraday 演讲中对此就强调地指出过, 电解的事实迫使我们接受电的原子性组成的观点. 然后对 Hittorf 在 1869 年就已经清楚地确立了的阴极射线的现象 (由在高度真空中的放电所产生) 所作的进一步研究也指出了这个方向. 这样一来, 电子论的数学发展虽然是在英国起步, 但是它的真正先驱就越来越是那个荷兰

[1] 中译本 195 页. —— 中译者注

人 H. A. Lorentz, 他的名字将永远和电子论的发展联系在一起, 而且特别是对于我们在此要讲的发展史来说更是处于首要地位. 作为特别的历史文献, 我们在此要给出 Wiechert 在 1899 年出版的 Gauß–Weber 纪念专辑 (Teubner 出版社) 中对事态所作的清楚的描述. (这里要特别提到 Wiechert, 因为他独立于 Lorentz (在他之后不久) 提出了原创的电子论的基本概念, 并且对其发展多有贡献.) 作为发展的一个侧面, 也是作为这个理论在 Maxwell 的祖国进展的证据, 我们要提出 Larmor 的书《以太与物质》(Cambridge, 1900).

总的来讲这一思想, 就我所知, 此后就越来越向前发展, 以致认为这种电荷的载体也是构造物质的最终的砖块. 已经提到过, 人们一方面有带正电的原子核, 原子的质量主要都集中在它上面, 而另一方面, 负电荷的基元部分却是非常轻的电子[1]. 然而, 原子核和电子的伸展的范围不管怎么说与原子的大小 —— 即上述两种粒子之间的距离 —— 相比, 小到可忽略不计, 以致原子的图像好似一个小型的行星系统. 但是电子与原子核之间的相互作用肯定并不严格遵守经典电动力学的规律, 以致这种情况已再也不能完全符合当今物理研究的现状[2]. 在宏观上经典物理仍然是对电现象的一个非常好的描述, 可是在原子的范围之内就必定会出现对这个数学的规定发生根本偏离, 而这个数学规定是用电子的假设来扩充 Maxwell 理论而生成的. 这些不会妨碍我们在下面的讲述中坚守经典的 Maxwell–Lorentz 理论, 因而也就是坚守 Maxwell 方程这个基础. 在后面我们还将追随 Einstein 沿着一定的方向继续前进[3]. 我们的看法应该是这样, 不同的物理理论总只能是对事物真相的一个近似, 而数学家要做的事, 则是就每一种确定的观点准备好追寻它们的后果.

## §5 关于 20 世纪以前对 Maxwell 理论的数学处理

Maxwell 的观念在我们这儿, 而且总的来讲在我们大陆, 在一个很长的时间里无法真正生根, 因为它太违反传统的观念了, 它在逻辑上也不是一个自身完整的系统, 而是从各种不同的出发点用演绎的手法来操作. 还有 Maxwell 理论的数学处理, 多年来都是为英国人保留的一块领地. 关于 Heaviside 我们已经反复讲到过了. 和他并列的几乎都是 Cambridge 学派的代表人物. 除他之外, 我在这里提几个老一辈的人, 首先是 Poynting (生于 1852 年), J. J. Thomson 和 Larmor (两个人都是在 1857 年出生). 关于 Larmor 的《以太和物质》, 我们在上面已经讲到过了.

[1] “Electron (电子)” 这个词是爱尔兰数学家 Stoney 第一次提出来的 (R. Irish Transactions (2), 4, 1891). 显然可以这样来理解: 人们在电解理论中所考察的最小的带电的物质粒子, 根据 Faraday 人们把它们称为*离子* (即游荡的粒子). 相应地人们把在现代电学中所研究的最小的带电的粒子称为电离子, 于是由此通过融合就形成了 “电子” 这个词.

[2] 见本章末的附注 2. (H.)

[3] 这个内容预定放在第四章的, Klein 已不再能最终完成它了. 见编者前言. (H.)

上面所描绘的这种情况现在已经完全改变了，因为 Hertz 在 1887 年成功地用实验证实了在介质中存在 Maxwell 所假设的电振动[1]．这时对 Maxwell 思想的理论处理也到处都开始了．第一个对此给我们作出了一个完整描述的就是 Hertz 本人[2]．被 Boltzmann 的激动人心的演讲 (Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichtes (电与光的 Maxwell 理论讲义), 1891 — 1893) 的全部力量所感动，也驱散了心头上的犹豫不决，Hertz 立即与 Boltzmann 并肩战斗．纯粹以太的 Maxwell 方程组对 Boltzmann 和 Hertz 来说都一样，以其简单性成为物理事件的最终的表达式．他坦率地引用 Goethe 的话说"难道他是上帝吗，那个写出这些符号的人?" 现在已经有了许多别的人跟上来了，我不可能在这里一一讲述．但是我们必须提到来自法兰西方面的 Poincaré．我已经在第一卷的第 8 章中详细地讲到过这个卓越的数学家了，而且我打算在本系列讲座的后面部分还要特别谈到他在数学的新近发展中所占有的独特地位[3]．在此关于他只讲一讲，他在 1885 — 1896 年间接任巴黎大学数学物理的教席，并且由此开始了不定期地讲授现代数学物理的知识，这些讲义以书籍的形式广为传播，以便用他的数学才能支撑其今后进一步的发展．很难讲，是他那永无止境的创造力，还是那永葆青春的感受力，这二者究竟是哪一个更令人赞叹，是他那永远活跃的感受能力，使得他能够立即接受一切来自物理方面的新出现的思想，并使它们进一步成型．

但是作为这一新思想领域内的领军人物，我们认为是已在上面提到过的荷兰人 H. A. Lorentz. 1853 年出生于 Arnheim，出身贫困的 Lorentz 主要靠自学成才，毕竟是受到了 van der Waals 在分子理论方面富有成果的研究工作的鼓励，后者 (生于 1837 年) 是第一个使那个有着古老农业国名声的荷兰恢复了出色的物理研究．我们得知，1872 年他在自己故乡的一所小的夜校里当老师，1875 年获得博士学位，1878 年就成为 van der Waals 在 Leyden 大学数学物理教席的后继者，从 1912 年起他就是在 Haalem 地方的 Teyler 基金会的理事，在这里他就能完全生活在他的理论研究之中了．当他在 1900 年能够庆祝他获博士学位 25 周年的时候，已经有来自世界各国的研究者给他带来了一本内容丰富的纪念册，后来作为《Archives Néerlandaises (荷兰文献档案集)》丛书第二套中的第六卷出版．

Lorentz 总是从具体的物理实验出发，寻求用分子理论的方法对其作出解释．因此他的数学有点繁琐，和他那对一般的现象描述之优美有点不同．他老是在有小

[1] Heinrich Hertz, 也是生于 1857 年，既是一个出色的理论物理学家，又是一个出色的实验物理学家；这样一个出众的天才在 37 岁的时候就离我们而去，实在遗憾．人们将永远高度评价 Helmholtz 的特殊功绩，是他把 Hertz 引上了正确的道路．关于 Hertz 对发展所作的贡献，见其全集第 1 卷的引言 (1895 年由 Lenard 编辑出版)，或者也可以参阅 Helmholtz 本人在那本于 1894 年就已出版的最后一卷 (包含有 Hertz 所写的力学) 上所写的前言．

[2] 论电动力学的基本方程，第 I 部 (对静止物体)，自 1890 起载 Gött. Nachr., 重印于 Ann. d. Phys. u. Chemie N. F. 第 40 卷, 1890; 第 II 部 (对运动物体)，第 41 卷, 1890.

[3] Klein 已再也不能完成这部分了．(H.)

量出现的时候就立即按幂级数展开, 并略去低阶项, 因此他早就与以他的名字命名的著名变换, 因其在数学上的简单而擦肩而过. 由于他如此深入地揭示了它们的普遍的物理意义 (不是讲电力的起源), 因此他甚至成了我们所主张的相对论观点之父. 但他开始完全是从一个绝对的, 即静止的以太出发, 而通常物质的粒子以及电子就在它们里面运动. 在这个基础上来解释运动体中的电和光的行为就是他的初衷. Hertz 为此所提出的起始的原理不能认为是已经得到了足够的承认.

Lorentz 已经出版的主要著作, 在这方面的我们必须提到的有:

1.《La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants (Maxwell 的电磁理论及其对运动物体的应用)》, 1892 Leyden, Archives Néerlandaises, 第 26 卷.

2. 用德文写的书:《Versuch einer Theorie der elektrischen und magnetischen Erscheinungen in bewegten Körpern (运动体中电与磁现象的一个理论的研究)》, Leyden 1895.

于此人们还可以对照他在百科全书 (第 V 卷, 第二部, 第 13, 14 期) 上写的两篇长文: Maxwells elektromagnetische Theorie (Maxwell 的电磁理论), Weiterbildung der Maxwellschen Theorie: Elektreonentheorie (Maxwell 电磁理论的进一步发展: 电子论).

## §6 关于 Lorentz 群的发展过程

在这里我们不打算讲实验的发现, 也不准备讲测量, 它们对概念的发展是具有决定性的意义 —— 这些读者可以去参考那些流行的书籍上的讲述 —— 而是要来讲其数学表述的历史[1]. 就我所知, 其主要部分大致可以归纳为以下几点:

1. Voigt: Über das Dopplersche Prinzip (论 Doppler 原理), Göttinger Nachrichten 1887.

在那时, Maxwell 方程组尚未受人注意, 而是一开始当成振动方程, 用我们的记号写出来就是:

$$\Box X = 0, \quad \Box Y = 0, \quad \Box Z = 0, \tag{15}$$

再加上辅助条件

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0. \tag{15'}$$

[1] 就此我要引用已在 65 页 (中译本 60 页) 上提到过的, Jacobi 在 1832 年的就职答辩中所讲几句话, 它在这里特别适合: "科学的成长非常缓慢, 人们要经历各式各样的错误之后才能达到真理; 所有的事情, 要想发现新的真理, 必须事先作长期的、大量的辛勤劳动, 而后在某个时刻, 在幸运地得到上帝的眷顾下, 那个 (新的真理) 才呈现出来.

我们已经指出过, 每一单个的方程 $\Box = 0$ 都可以通过 $\infty^7$ 个线性代换变到自身, 这 $\infty^7$ 个线性代换可以再要求其代换行列式等于 $\pm 1$ 简约为 $\infty^6$ 个 (只要在进一步限制的条件下, 我们正好可以由此得到更小的 Lorentz 群). 现在 Voigt 也是以 $\infty^7$ 个代换为基础, 他把它们限制到 $\infty^6$ 个的办法是, 通过变换把从一开始所采用的 $t$ 变成以下的形状:

$$t' = t - (ax + by + cz). \tag{16}$$

因此它也仅仅是时间的起点移动, 而移动的量也只与 $x, y, z$ 有关, 但是时间的尺度没有改变 (这一点将来对原则性的概念很重要). 接下去讲的就是一些特殊情况, 在这种情况下人们对涉及 $X, Y, Z$ 与 $x, y, z$ 之间的依赖关系作出适当的假定, 以使辅助条件 (15′) 对变换 (16) 保持不变.

2. Lorentz 1892 (见上一节末尾所引文献). 在这里位于 Maxwell 方程组之前的, 除了 $x, y, z, t$ 的变换外, 还有 $X, Y, Z, L, M, N$ 的变换. 但是这里也要用到公式 (16); 从为时间 $t'$ 专门引进一个特别的术语: "本地时 (Ortszeit)", 就可看出它是特别重要的. 和在 Voigt 那里一样, 单纯沿 $x$ 轴方向的位移受到优先的考虑. 于是得到 $x, y, z, t$ 的准确的代换公式为:

$$x' = x - vt, \quad y' = y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad z' = z\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad t' = t - \frac{vx}{c^2} \tag{17}$$

(这里 $v$ 代表平移的速度, $c$ 代表光速). 但是, 正如我们在上面已经指出过, 现在 Lorentz 在这里还把上式中的根式用其近似值 $1 - \dfrac{v^2}{2c^2}$ 来代替, 从而我们得到的还只是一个近似的公式.

3. 特殊变换 (17) 式在关于 Lorentz 群的整个文献中的地位如此重要, 我们还要对它再详细一点地来谈一下. 自然用 $l = ict$ 的正交的写法能提供最简明的审视. 我们令:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot l \\ l' &= -\sin\varphi \cdot x + \cos\varphi \cdot l \end{aligned}\right| y' = y, \quad z' = z, \tag{18}$$

然后, 因为根据先前的约定, $U, V, W, L, M, N$ 应与下述矩阵:

$$\begin{Vmatrix} dx & dy & dz & dl \\ \delta x & \delta y & \delta z & \delta l \end{Vmatrix}$$

的子行列式同步, 所以再设[1]:

$$\begin{aligned} U' &= U, & L' &= L, \\ V' &= \cos\varphi \cdot V + \sin\varphi \cdot N, & M' &= \cos\varphi \cdot M + \sin\varphi \cdot W, \\ W' &= \cos\varphi \cdot W - \sin\varphi \cdot M, & N' &= \cos\varphi \cdot N - \sin\varphi \cdot V, \end{aligned} \tag{18'}$$

[1] 这里将原书各式的排序略加了变动. —— 中译者注

这里还要将 $l$ 用 $ict$; $U, V, W$ 用 $iX, iY, iZ$ 代入. 如果人们想使代换系数都是实数, 则为了使 $\cos\varphi$ 保持为实数, 而且 $i\sin\varphi$ 也为实数, 则必须令 $\varphi = iw$. 于是 $\varphi$ 的三角函数就转化为 $w$ 的双曲函数:

有[1]

$$\cos i\omega = \mathfrak{Cof}\ \omega, \quad i\sin i\omega = \mathfrak{Sin}\ \omega,$$
$$\mathfrak{Cof}^2\ \omega - \mathfrak{Sin}^2\ \omega = 1.$$

从而变换公式就成为:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \mathfrak{Cof}\ \omega \cdot x + c\mathfrak{Sin}\ \omega \cdot t \\ t' &= \frac{\mathfrak{Sin}\ \omega}{c} \cdot x + \mathfrak{Cof}\ \omega \cdot t \end{aligned}\right| y' = y, \quad z' = z \tag{19}$$

以及

$$\begin{aligned} X' &= X, & L' &= L, \\ Y' &= \mathfrak{Cof}\ \omega \cdot Y - \mathfrak{Sin}\ \omega \cdot N, & Z' &= \mathfrak{Cof}\ \omega \cdot Z + \mathfrak{Sin}\ \omega \cdot M, \\ M' &= \mathfrak{Sin}\ \omega \cdot Z + \mathfrak{Cof}\ \omega \cdot M, & N' &= \mathfrak{Cof}\ \omega \cdot N - \mathfrak{Sin}\ \omega \cdot Y. \end{aligned} \tag{19'}$$

不过目前在物理学家中间双曲函数的使用还不普遍. 于是我们令:

$$\mathfrak{Cof}\ \omega = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}, \quad \mathfrak{Sin}\ \omega = \frac{q}{\sqrt{1-q^2}},$$

其中 $q$ 是一个真分数. 于是我们就得到:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x + cqt}{\sqrt{1-q^2}} \\ t' &= \frac{\dfrac{q \cdot x}{c} + t}{\sqrt{1-q^2}} \end{aligned}\right| \begin{aligned} y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}, \tag{20}$$

以及

$$\begin{aligned} X' &= X, & L' &= L, \\ Y' &= (Y - qN) : \sqrt{1-q^2}, & M' &= (M + qZ) : \sqrt{1-q^2}, \\ Z' &= (Z + qM) : \sqrt{1-q^2}, & N' &= (N - qY) : \sqrt{1-q^2}. \end{aligned} \tag{20'}$$

而且如果我们将 $\frac{v}{c} = q$ 代入, 这里的 (20) 式与 (17) 式是不同的, 只有这样才能使它的行列式为 $+1$, 而 (20′) 却是对 Maxwell 方程组的不变性必需的补充条件.

我们在以下就简单地把 (20) 式, (20′) 式称之为特殊 *Lorentz* 变换.

4. 不过第一个建立这组公式的并不是 Lorentz, 而是 Larmor; 参见我们在本书第 67 页 (中译本第 62 页) 所提到的, 他在 1900 年出版的《以太与物质》一书,

[1] 现在双曲余弦函数和双曲正弦函数分别写作 cosh, sinh. —— 中译者注

第 167, 174, 176 – 177 等各页. 他和后来所有的作者完全一样采用了这样的办法, 在一个沿 $x$ 方向 (以速度 $v$) 做匀速运动的参照系上确立一个静止坐标系, 我们求出 Maxwell 方程组在这个坐标系中的解, 为的是好在以后把这个解反推到运动的坐标系上去. 但是 Larmor 所做的这些相关的研究没有得到人们的注意. 确切地说是, 在蓬勃深入的发展, 这是我们就要来讲的, 开始来到之际, 正好这时 Lorentz 独立重新发现了整个方法 (而此时 Larmor 却埋头于其他研究之中) (见 Verlag der Amsterdamer Akademie (阿姆斯特丹科学院年鉴) 第 12 卷, 1904, 986 – 1009 页). 至于他在 1892 年就已经很接近了这一点, 已经在上面第 2 点中提到过了. 因此就不断有人讲到这些, 从而终于使我们把他的名字钉到了方程组 (20), (20′) 上面了.

5. 终于是 1905 年来到了, 这一年发表了 Poincaré 和 Einstein 的文章, 这两篇文章的同时出现是相互独立的, 尽管二者都讲到了 "相对性" "公设" 或者说 "原理".

Poincaré 开始是在巴黎科学院 7 月 5 日的 Comptes Rendus (汇报) 上发表了一篇短文, "Sur la dynamique de l'électron (论电子的动力学)", 后来把它写成了一篇较长的专题论文于 7 月 23 日提交给了在 Palermo 的 Circolo matematico (数学协会), 但拖到了 1906 年才发表 ("Sur la dynamique de l'électron (论电子的动力学)", Palermo Rend, 第 21 卷).

但是 Einstein 的论文 "Zur Elektrodynamik bewegter Körper (论运动体的电动力学)" 编辑部是于 7 月 30 日收到的, 在 9 月 26 日就在该刊的第 17 卷, 第 4 期上发表了.

比较这两篇如此竞相发表的文章是很有意思的. —— Poincaré把数学武器更清楚地摆了出来; 他指出, Lorentz 变换其总体构成一个群 (于是他就为它们创造 Lorentz 群这个称呼); 这期间他还利用了由于选 $ict$ 作为第四变量等而带来的简化. 其次, 他最先讨论了天体力学, 因而也就是引力学说, 与 Lorentz 群的不变理论 ("相对论") 相适应的问题, 就此他得到的结果是, 与经典的理论相比, 出现的偏离其数量级仅为 $\frac{v^2}{c^2}$, 其中 $v$ 表任意一个所观察的天体的运动速度. 经典理论看来就是新理论在 $c=\infty$ 时的极限. 我们在下面还会回来详细地讨论这种问题. —— 在 Einstein 这方面则是自然哲学的思想放在首位. 他指出, 在 Lorentz 变换中包含了对时间概念的一个全新的诠释. 根本就不存在两个事件的绝对同时性, 而只有这样一种相对于某一坐标系的同时性, 而这个坐标系则是那无穷多个特选的, 等价坐标系中的任一个. 这个年轻的研究者对数学上的瞬时的意义 (transienten Bedeutung der Mathematik) 的信任是如此巨大, 以至于他假设, 一个运动着的钟 (因而也许就是一个运动光源的振动数) 所测得的时间对一个静止于参照系 $x, y, z, t$ 的观察者来说不是

$$\int dt,$$

而是

$$\int \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}},$$

因而对一个静止的观察者来讲就走得要稍稍慢一点, 因为会增大一个量[1]

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = v^2.$$

6. 最后是 Minkowski 在 1907 — 1908 年终结性的文章. 在他发表的文章中, 最重要的是下面两篇, 其出版还是他自己操办的[2]:

a) 运动物体中电磁过程的基本方程组 (Gött. Nachr. 1908, 1907 年 12 月 21 日提交). 全集第 2 卷.

b) 空间和时间 (1908 年 9 月 21 日在 Köln (科隆) 召开的自然科学工作者会议上所做的报告). 全集第 2 卷.

在论文全集中紧接着这两篇的还有一篇由 Born 从遗著中选出的.

c) 从电子论观点出发推导基本方程组等 (起初刊于 Math. Annalen 的第 68 卷 1910).

但是接下来还有出自 1915 年出版的、他的演讲文稿中的一篇, 是他于 1907 年 11 月 5 日在我们 Göttingen 数学协会上所做的:

d) 相对性原理 (Ann. d. Phys. (4), 47 或 Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung (德意志数学家协会年报) 24). d) 中的讲述是我最喜欢的. 因为是给同行专家讲, 所以在这里讲的是他的内在的数学思想, 特别是不变量理论的思想, 也就对外敞开了, 而在 a) 中, 为了保证不假设有特殊的预备知识, 选择了一种冷冰冰的讲述, 它是通过专门为此想出来的矩阵算法来表述的, 这种算法的外在细节是初等而易接受的, 但其内在的形成机制仍然不好理解.

在 Minkowski 这里我们有两点: 对 Lorentz 群不变量理论的数学工具的完全掌握以及用简洁的语言规定其自然哲学的意义. 就第一点而言, 我们预先指出, 考虑到我们自己在前几节所给出的表述: 是 Minkowski 第一个清楚地认识到 $X, Y, Z, L, M,$

---

[1] Einstein 1879 年 1 月生于 Ulm. 他的小学教育是不正规的, 有时候在瑞士, 有一部分是在意大利. 然后在 Zürich (苏黎世) 读大学, 他以论气体内摩擦的研究工作获得博士学位, 然后在 Bern (伯尔尼) 的专利局里谋得一个小的职位. 就是在这里写下了他那 1905 年的文章, 这使他获得了在 Bern 大学教学的职位, 并由此在别人的帮助下直接被聘为 Zürich 大学的编外教授. 1911 年成为 Prag (布拉格) 大学的正教授. 1912 年转到 Zürich 工业大学 (任正教授 —— 中译者注). 自 1914 年起他一直是 Berlin 普鲁士科学院的一名受人称颂的院士. 和 Hertz 与 Minkowski 一样, Einstein 是犹太人的后裔. —— 令人惊讶的是, 这里有一个好像是天生的奇才在正规的学校之外成长, 与 Poincaré 完全不同. 后者在巴黎高等师范大学的影响下, 在固定范围的教养过程中接受高等教育. 由于这个关系, Einstein 的数学知识一开始比较少; 他是在与其他一些数学家的交往中逐渐扩大他的数学知识的. 正是由于这样他保持了本人独立思考的原创性. 这对他来说是不是就是他的压倒性的优势所在呢?

[2] Minkowski 1909 年 1 月 12 日由于一次手术的原因去世, 享年仅 44 岁.

$N$ 是一个六维张量的分量这一本质的, 从而充分理解了 Maxwell 方程组的内在结构[1]. 此外在下面的讲述中我们将由 Minkowski 的观念来引导, 不过遗憾的是, 根据讲述的计划我们不得不限于基本的初步知识.

在外部的形式上我赞同那多次被反复提到过, 也是德国物理学家经常读的, 由 Sommerfeld 在 1910 年所写的评述: 谈相对论. 第 I 部分: 四维向量代数, Ann. d. Phys., (4), 32; 第 II 部分: 四维向量分析, 同上刊物, 33. 我们最好还是用我们已经熟悉的不变量理论的概念和计算来代替 Sommerfeld 用的几何类比. v. Laue 在他的书:《Das Relativitätsprinzip (相对性原理)》(第 I 卷, Braunschweig 1911, 第二版 1913[2]) 中也已经这样做了, 但是我认为还有许多地方可以表述得更精确些, 有些地方又可以更简单些. 这一大大的简化是特别这样得到的, 即我完全放弃讲述当今的一些实验以及原来的那些三维的理解如何逐渐转化为四维的认识的, 而是从一开始就进行四维思想的演绎. 大家肯定都知道, 我们一开始就可从 Copernicus (哥白尼) 的世界观来展开, 而不必从地心的观察出发, 经过 Ptolemy (托勒密) 的学说再上升到它. 自然现在一多半的天文学家, 他们对哥白尼的观念绝对信服, 而且不会下大力气再从那些详细的地心观察出发去认真思考来得出这个结论.

## §7 关于新学说的进一步的传播. 1911 年及 1909 年以后的发展

所谓 "新学说" 这里是指, 必须将物理学的所有部分中的 Galilei–Newton 相对性理论换成 Lorentz 的相对性理论.

大多数的老一辈的物理学家, 通常在与世隔绝的时候, 都比较迟钝, 这在心理学上是可以理解的. 一个人在几十年内形成了一定的思维方式, 难以突然转变. 无论如何他总是想用那种建立在他先前那些原则上的方法去理解新生的事物, 这就不能不导致各种各样的麻烦产生. 例如 Lorentz 本人就是这样. 年轻的一代就完全是另一样. 许多过去在电动力学中显得复杂的东西, 现在一下子变得简单起来; 我将来还会多次回到这上面来, 而且还会谈起许多个人的名字. 于是产生了在各个方面向前推进的热情. 但是作为原则性的进展我想指出的是, Planck 已经在 1907 年成功地[3] 将热力学与新观念联系了起来, 还有就是, Herglotz 在 1911 年以完整的形式处理了变形体动力学[4], 它的基本原则已由 Minkowski 给出了.

---

[1] 遗憾的是, Minkowski 在 a) 中对这个我们这里称之为六维张量的量用了一个很平淡的词: "第二类向量". 可是在 d) 中相反他就建议对它采用一个我感到完全适合的称呼 "牵引量 (Traktor).

[2] 第 II 卷 (1921 年及 1923 年) 是讲广义相对论的. (H) (这部书后来在 1955 年相对论诞生五十周年之际又出了它的第六版, 书名也改为《相对论》, 仍分成两卷出版, 第 I 卷为: 狭义相对论; 第 II 卷为: 广义相对论. —— 中译者注)

[3] Sitzungsberichte der Berliner Akademie (柏林科学院报告) 1907 = Ann, d. Phys. (4), 第 26 卷, (1908).

[4] Ann. d. Phya. (4) 第 36 卷, (1911).

可是这些事情我们在这里也只能顺带地谈一下. 对我们来说更重要的是, 要来证实大多数的数学家立即投入到了这个运动中来了, 而且要解释为什么会这样. 在一方面我们对此可这样讲, 那些经历过非欧几何历练的数学家, 从一开始就认为, Galilei–Newton 群, 在它还显得很值得期待之时, 与 Lorentz 群相比, 前者是后者的极限情形, 两者的地位应该对调. 在这个观点下就是任何内在的障碍都被消除了. 但是更重要得多的是, 数学家还要求, 借助于他们的不变量 (或几何) 理论的研究, 已经准备好把这一系列的新思想, 在它们还处于另一种形式之中时, 不管三七二十一, 把它们搬过来. 没有人像 Minkowski 那样受到过如此激烈的触动并对由此产生的事态做过如此高的评价, 他在上面 d) 中提到的, 在 Göttingen 数学协会上所做报告开讲时宣称:

"数学家为接受新的扩展做好了特别充分的思想准备, 因为这里涉及的是概念驯化工作, 这是数学家早就非常熟悉的, 而物理学家现在却发现这些概念有一部分是新的, 自己好像置身于一片未知的原始森林中, 必须在一条羊肠小道上吃力地穿行, 而这时完全就在他的附近有一条早就出色地铺就的大道引领着数学家们前进. 总的来讲, 只要新的原理的确能够正确地再现现象, 那就肯定意味着它们是一个巨大的胜利, 这是数学的应用从来就已经证明过了的. 这里所要讲的是 —— 用尽可能简单的话来表达 —— 我们这个在时间与空间中的世界在某种意义上就是一个四维的非欧流形. 数学家纯粹在他们的想象中创造了一个巨大的领域, 而且这种想象中的理想伙伴不论如何, 有一天成为完美的真实存在, 这将是数学家的光荣, 也定将引起其他人的无限惊叹."

对 Minkowski 的这些话我只能这样来解释, 它们同时涉及了观念和先决条件, 这些概念和先决条件是从当时的表述中提取出来的. 它们也同时包含了即将来到的、它们所能达到的部分, 即也包括了将进一步提出的物理原理, 这些后来通过 Einstein 在 1911 年的思想极为丰富的论文得到了解决[1]. 在此同时 Einstein 还在寻求一种能将引力学说与电磁现象的理论从内部连接成一体的形式体系, 于是他就从 Lorentz 群的相对性理论, 因而也就是从一个参数个数有限的线性群的相对性理论, 自发地走向了包含全体点变换的变换群, 因而按照 Lie 所引进的术语就是无穷的连续群的相对性理论. 为了理解上面所讲的意思, 我们在后面必须回顾并追思那一特别深刻的思想, 那一 Riemann 在 1854 年的就职演讲 "Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen (论奠定几何学基础之假设)" 中所开创的思想. 因为 Riemann 在该文中完全主要都是由自然哲学的兴趣所指引, 我们在第 I 卷中已经突出地讲过了.

此外我高兴地还要提到另一个在我们这个方向上的进展, 它是由数学家在 1909 年所得到的. 它的出现恰好我又可以把它与 Erlangen 纲领联系起来. 在讨论 $R_3$

[1] 见本书 67 页, 脚注 3 (H.). (中译本 62 页, 脚注 3.)

的, 具有 6 个参数的 Euklid (欧几里得) 群时, 在那里最后谈到那个通过加入取半径倒数的变换而得到的扩张群. 这是一个 $G_{10}$, 我后来就把它简单地称为共形变换群, 因为它包含了把 $(dx^2+dy^2+dz^2)$ 变到自身与一个常量的乘积的空间变换的全体 (1845 年 Liouville 就已经认识到了这一事实). 它们也可以写成一个齐次线性群, 只要我们特别的令

$$x=\frac{\xi}{w},\quad y=\frac{\eta}{w},\quad z=\frac{\zeta}{w}$$

以及

$$x^2+y^2+z^2=\frac{\rho}{w};$$

于是它们就可以通过 $\xi,\eta,\zeta,\rho,w$ 的那样一些能保持下述二次方程

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\rho w=0$$

不变的齐次线性代换来表示. 所有这些都可以推广到 $n$ 维空间; 由此就生成一个 $G_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$, 因而为在 $R_4$ 中为一 $G_{15}$[1]. —— 另一方面众所周知的是, W. Thomson 在他的第一篇论文 (1845) 中深入广泛地应用了以下结论, 即由每一 $R_3$ 中的势函数 $V(x,y,z)$, 即每一个满足方程 $\Delta=0$ 的函数, 通过坐标函数的反演并除以 $r$ 可得出一个新的势函数, 即

$$\frac{1}{r}V\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right).$$

这个结果稍加修改也可以推广到任意维并由此得出整个相应的共形群. 由于这一结果, 我想推荐分别由 Pockel[2] 和 Bôcher[3] 写的两本书. —— 现在我们得知, 在引入 $l$ 来代替 $ict$ 之后, Maxwell 方程组与四维空间中的势理论 (它将由方程 $\Box=0$ 来给出) 有密切的关系. 因而人们几乎是不言而喻就会问, 是不是可以通过巧妙地应用 $x,y,z,l$ 的一般的共形变换来保持 Maxwell 方程组不变. 尽管似乎没有人考虑过这一可能性, 直至 1909 年由英国的数学家 Cunningham 和 Bateman 完整地加以证明了; 特别是, Bateman 对此给出了一个非常有趣的不变量理论的发展 (见 Proceedings of the London Mathematcal Society (伦敦数学学会会刊) (2), VIII, 1910 及以后). 相应于 $R_4$ 的每一个单独的共形变换, 我们要使 $X,Y,Z,L,M,N$ 本身也经过一个齐次线性代换, 只是它的系数不再是常量, 而是 $x,y,z,t$ 的确定的简单函数.

因此相对论的方法对 Maxwell 方程组来说还有一个远远超过了 Lorentz 群的意义. 但是, 在纯粹数学以前的发展与新近物理学的思想构建之间存在惊人的和谐,

[1] 在 1869 — 1872 年间, Darboux, Lie, 还有我本人在这方面也做了很多工作; 见, 例如, 在我的 "Vorlesungen über höhere Geometrie (高等几何讲义)" 第 I 部 (Berlin, 1926) 中的总结性的讲述.

[2] Über die partielle Differentialgleichung $\Delta U+k^2U=0$ und ihr Auftreten in der mathematischen Physik (论偏微分方程 $\Delta U+k^2U=0$ 及其在数学物理中的出现), Leipzig, 1891.

[3] Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie (论势理论中的级数展开), Leipzig, 1894.

在一个更加广大的领域内又得到了新的证明. —— 使人感到奇怪的是, 这些研究如上所说的, 在我们德国至今只受到了很少的注意, 关于这一点我们将来也只能在适当的时候回过来谈一谈.

## II 在正交形式下 Lorentz 群的处理

我们对 Lorentz 群的相对论的讲述将主动地分为两部分. 首先, 为了转向原理的内在对称性, 我们将采用代换的正交写法, 因而也就是 (按照上一部分的 §2) 从 $x_1, x_2, x_3, x_4$ 等出发. 其次我们将对 Lorentz 群的一些特别的实数关系进行计算. 不过我们不会从头到尾都这样做, 当为了避免重复时就不会, 但是在下面第 II 部及第 III 部整个的特点都是这样.

### §1 相应四维分析纲要

1. 四维 "世界 (Welt)" 点的坐标 $x_1, x_2, x_3, x_4$ (或者 $y_1, y_2, y_3, y_4$ 等也一样), 对它们的非齐次线性代换写成

$$x_i' = \alpha_i x_1 + \beta_i x_2 + \gamma_i x_3 + \varepsilon_i x_4 + \varsigma_i, \quad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{1}$$

其中 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \varepsilon_i$ 构成一个行列式等于 1 的正交矩阵, 而 Lorentz 群为这全部 $\infty^{10}$ 个代换的整体.

2. 四维向量, 即四个量的量丛, 它们经受这样一个齐次线性代换, 这个代换是 (1) 式中将 $\varsigma_i$ 排除后余下的部分. 两行点坐标之差就是一个简单的例子:

$$x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, x_4 - y_4,$$

而且特别地还有微分:

$$dx_1, dx_2, dx_3, dx_4,$$

但是下述偏微分:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4}$$

同样也是 (因为在正交代换下同步变量与逆步变量的差别不再有了).

我们在下面要处理的不仅有个别的向量, 还有向量场. 以后我们把四维向量记成

$$u_1, u_2, u_3, u_4, \quad \text{或} \quad v_1, v_2, v_3, v_4, \text{ 等等}, \tag{2}$$

这样就可以避免与点的坐标的分量搞混. 在向量分析中出现的最简单的量, 即标量, 于是就以二次型

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 \quad \text{或} \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 \tag{3}$$

以及相应的极式

$$u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3+u_4v_4 \tag{4}$$

呈现在我们面前. 于是当我们讲到一个场 $u(x)$ 的大散度 (*Großdivergenz*) 时, 它就只不过是 (4) 式的一个特殊情形:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+\frac{\partial u_4}{\partial x_4}=\mathrm{Div}(u); \tag{5}$$

这里的前置词 "大" 是依 Sommerfeld 的意见来采用的, 在此以及在今后类似的情况下要记住, 我们用它来处理的是有四个, 而不是三个变量的情形.

3. 设 $f(x)$ 为任一标量, 那么

$$\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\frac{\partial f}{\partial x_3},\frac{\partial f}{\partial x_4}$$

就是一个四维向量, 它是 $f$ 的大梯度 (*Großgradient*). 由它可以形成两个标量, 一个是

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right)^2,$$

另一个是

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_4^2}.$$

其中后面那一个我们又用

$$\Box f \tag{6}$$

来表示.

4. 六维张量, 即 6 个量 $\lambda_{ik}$ (或 $\mu_{ik}$ 也可以), 它们的代换方式和下述由两个四维向量的分量组成的矩阵

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix}$$

的 6 个子行列式的代换方式一样. 对 $\lambda_{ik}$ 我们有两个不变量:

$$\begin{cases} \Lambda=\lambda_{14}\lambda_{23}+\lambda_{24}\lambda_{31}+\lambda_{34}\lambda_{12}, \\ \Omega=\sum\lambda_{ik}^2, \end{cases} \tag{7}$$

其 "对偶张量" $\mu_{ik}$ 就是最一目了然地通过下述方程来给出:

$$\mu_{ik}=\frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda_{ik}}, \tag{8}$$

由此知 $\Lambda$ 取下述值:

$$M=\mu_{14}\mu_{23}+\mu_{24}\mu_{31}+\mu_{34}\mu_{12}. \tag{9}$$

因而反过来我们也有:

$$\lambda_{ik} = \frac{\partial M}{\partial \mu_{ik}}. \tag{10}$$

此外我们又可以根据需要在式中引入:

$$\lambda_{ki} = -\lambda_{ik}, \quad \lambda_{ii} = 0 \tag{11}$$

(对 $\mu_{ik}$ 也可以引入类似的式子). 要特别提一下, 在这里指标自然通常取为 4.

5. 此外还有一个重要的六维张量, 它由下述矩阵得出:

$$\left| \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{matrix} \right|,$$

因而有

$$\lambda_{ik} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \tag{12}$$

其中 $u$ 指任一四维向量. 我们把它记为 Rot$u$, 称之为向量场 ($u$) 的*大旋度* (*Großrotation*).

正如我们已经在 I, §2 中指出的, 由一任意的六维张量 $\lambda_{ik}$ 或 $\mu_{ik}$ 及一任意的四维向量 $u_i$, 我们可按简单的方式组合出两个新的四维向量:

$$v_i = \sum_k \lambda_{ik} u_k \quad \text{以及} \quad v_i' = \sum_k \mu_{ik} u_k. \tag{13}$$

6. 现在为了再拿出一点新东西来, 我们指出, 由坐标 $\lambda_{ik}$ 可以组合出两类大三重量 (Größentripel), 我们把它们称之为*三维张量* (*Dreiertensoren*).

这就是, 通过下述两个标量

$$\Omega \pm 2\Lambda$$

我们就得到两个三元不变量:

$$(\lambda_{14} \pm \lambda_{23})^2 + (\lambda_{24} \pm \lambda_{31})^2 + (\lambda_{34} + \lambda_{12})^2;$$

由此得出下述两组量:

$$\begin{aligned} &\lambda_{14} + \lambda_{23}, \quad \lambda_{24} + \lambda_{31}, \quad \lambda_{34} + \lambda_{12}, \\ &\lambda_{14} - \lambda_{23}, \quad \lambda_{24} - \lambda_{31}, \quad \lambda_{34} - \lambda_{12}, \end{aligned} \tag{14}$$

每一组都作三元正交代换 (顺便提一下, 它们绝不是同步变量); 其细节我们到 §2 中再回过来谈. 在此我们要记起 $\lambda_{ik}$ 原来的电磁学意义. 我们有

$$\begin{aligned} &\lambda_{23} = L, \quad \lambda_{31} = M, \quad \lambda_{12} = N, \\ &\lambda_{14} = iX, \quad \lambda_{24} = iY, \quad \lambda_{34} = iZ. \end{aligned}$$

因此就可以用 (14) 式中的三元量 (Dreiergrößen) 来作复数组合

$$L \pm iX, M \pm iY, N \pm iZ, \tag{15}$$

这些我们在处理 Maxwell 方程组时就已经常引用过, 只是没有直接转到这里明显地表现出来的原理上来.

7. 最后是十维张量, 这我们在前面 (第一章 B, §4) 中就已经提到过. 它讲的是任一由一四维向量的坐标构成的二次型的系数 $a_{ik}$ 的总体, 因而它讲的也就是量从 $a_{ik}$, 它们在 Lorentz 群下这样来代换, 使得

$$\sum a_{ik} u_i u_k \tag{16}$$

为不变量. 我们在上面所引用的地方也已经提到过那个特殊的十维张量, 其系数为

$$\delta_{ik} = 0 (i \neq k), \quad \delta_{ii} = 1.$$

8. 有一个简单的方法能从一个六维张量导出一个十维张量. 依据 (13) 式我们写下:

$$v_i = \sum_k \lambda_{ik} u_k,$$

从而我们得到一个新的四维向量, 而且即使我们重复这个代换:

$$w_h = \sum \lambda_{hi} v_i$$

得到的仍然是一个四维向量. 我们把这两个代换结合起来则得到:

$$w_h = \sum_i \sum_k \lambda_{hi} \lambda_{ik} u_k,$$

而且其中出现的那组系数, 因为对主对角线对称, 是一个十维张量*. 值得把它们详细写出来. 适当地对指标排序, 我们得到:

$$\begin{pmatrix} -\lambda_{12}^2 - \lambda_{13}^2 - \lambda_{14}^2 & \lambda_{13}\lambda_{32} + \lambda_{14}\lambda_{42} & \lambda_{14}\lambda_{43} + \lambda_{12}\lambda_{23} & \lambda_{12}\lambda_{24} + \lambda_{13}\lambda_{34} \\ \lambda_{23}\lambda_{31} + \lambda_{24}\lambda_{41} & -\lambda_{23}^2 - \lambda_{24}^2 - \lambda_{21}^2 & \lambda_{24}\lambda_{43} + \lambda_{21}\lambda_{13} & \lambda_{21}\lambda_{14} + \lambda_{23}\lambda_{34} \\ \lambda_{32}\lambda_{21} + \lambda_{34}\lambda_{41} & \lambda_{34}\lambda_{42} + \lambda_{31}\lambda_{12} & -\lambda_{34}^2 - \lambda_{31}^2 - \lambda_{32}^2 & \lambda_{31}\lambda_{14} + \lambda_{32}\lambda_{24} \\ \lambda_{42}\lambda_{21} + \lambda_{43}\lambda_{31} & \lambda_{43}\lambda_{32} + \lambda_{41}\lambda_{12} & \lambda_{41}\lambda_{13} + \lambda_{42}\lambda_{23} & -\lambda_{41}^2 - \lambda_{42}^2 - \lambda_{43}^2 \end{pmatrix},$$

我们再在上式中处处都加上 $\frac{1}{2}\delta_{ik} \cdot \Omega$, 我们就得到下面的矩阵 *, 它在研究 $\lambda_{ik}$ 的电磁场时很有用, 为此我们用一个特殊的字母 $F$ 来表示:

$$F = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda_{12}^2 + \lambda_{13}^2 + \lambda_{14}^2 \\ -\lambda_{34}^2 - \lambda_{42}^2 - \lambda_{23}^2 \end{pmatrix} & — & — & — \\ — & -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda_{23}^2 + \lambda_{24}^2 + \lambda_{21}^2 \\ -\lambda_{41}^2 - \lambda_{13}^2 - \lambda_{34}^2 \end{pmatrix} & — & — \\ — & — & -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda_{34}^2 + \lambda_{31}^2 + \lambda_{32}^2 \\ -\lambda_{12}^2 - \lambda_{24}^2 - \lambda_{41}^2 \end{pmatrix} & — \\ — & — & — & -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda_{41}^2 + \lambda_{42}^2 + \lambda_{43}^2 \\ -\lambda_{23}^2 - \lambda_{31}^2 - \lambda_{12}^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \tag{17}$$

其中右下角的项, 如我们再把它除以 $c^2$, 并用 $X, Y, Z, L, M, N$ 写出来就取以下的形式:

$$\frac{1}{2c^2}\left(X^2+Y^2+Z^2+L^2+M^2+N^2\right).$$

这个表达式 (取在单位体积上的值) 物理学家习惯上把它称之为比能量 (spezifische Energie). 由此人们对这个十维张量就给予了特别的关注 (所以有时就直接把它称之为 "世界张量"). 因而比能量相对于 Lorentz 群绝不是什么不变量, 而不过仅仅是一个十维张量的一个分量. 其余分量的物理意义我们将在以后再讲.

9. 一般来讲, 由一个十维张量的分量 $a_{ik}$ 及一个四维向量 $u_k$ 可以下述形式产生一个四维向量

$$\sum_k a_{ik}u_k; \quad i=1,2,3,4.$$

作为特殊情形我们又有

$$\sum_k \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} \quad (i=1,\cdots,4) \tag{18}$$

这个向量 Sommerfeld 称之为十维张量 $a_{ik}$ 的向量散度 (*Vektordivergenz*). 对于电磁场的十维张量 $F$ 来说可以用 Maxwell 方程组证明它的向量散度恒等于零 (这一点既可以通过 $F$ 的构造规律看出, 也可以通过具体计算来验证). 我们将在 §6 中深入讨论.

## §2 再谈四元数

本节的讲述大部分将以 Minkowski 在 1907 — 1908 年的重要著作为依据. Minkowski 在那里也有时提到可以利用四元数的表述形式, 但是看来他可能感到太困难了. 不过我们可以指明, 如何简单地把理论的基本形式写成四元数的形式.

我们在第 I 章 B, §3 已经指出, 如何用四元数来表述行列式为 1 的一般正交代换. 现在我们只要再增加一些新的记法. 首先我们把四维向量 $(u)$ 写成四元数:

$$(u)=iu_1+ju_2+ku_3+u_4.$$

再者, 我们把一个四元数 $q=ia+jb+kc+d$ 的系数平方和 $a^2+b^2+c^2+d^2$ 记为 $Nq$, 即 $q$ 的模 (Norm). 这样一来四维向量 $(u)$ 的最一般的幺模正交代换, 即在正交形式中的最一般的 Lorentz 代换就可写成下面的形式:

$$(\bar{u})=\frac{q\cdot(u)\cdot q'}{\sqrt{Nq\cdot Nq'}}. \tag{19}$$

此处的 $q, q'$ 为两个任意的四元数. 但是如果我们特别地令 $q'=q^{-1}$, 则有 $Nq\cdot Nq'=1, \bar{u}_4=u_4$, 这样我们就得到了 3 个变量 $u_1, u_2, u_3$ 的最一般的三元幺模正交代换的

公式为:

$$(i\bar{u}_1 + j\bar{u}_2 + k\bar{u}_3) = q(iu_1 + ju_2 + ku_3)q^{-1}. \tag{20}$$

现在如果还用上一节的三维张量来称呼, 即这样的量丛, 它在四元数的代换 (19) 式的作用下, 对 $u$ 本身则作用三元正交代换. 这些代换现在实质上就由 (20) 式来给出. 于是我们就求得, 在假设有公式 (19) 的作用下, 对下述三维张量

$$\lambda_{14} + \lambda_{23}, \lambda_{24} + \lambda_{31}, \lambda_{34} + \lambda_{12},$$

其代换为

$$\begin{aligned} &i(\bar{\lambda}_{14} + \bar{\lambda}_{23}) + j(\bar{\lambda}_{24} + \bar{\lambda}_{31}) + k(\bar{\lambda}_{34} + \bar{\lambda}_{12}) \\ =\ &q'^{-1}(i(\lambda_{14} + \lambda_{23}) + j(\lambda_{24} + \lambda_{31}) + k(\lambda_{34} + \lambda_{12}))q', \end{aligned} \tag{21}$$

$q$ 从其中完全出局了, 而对另一个三维张量

$$\lambda_{14} - \lambda_{23}, \lambda_{24} - \lambda_{31}, \lambda_{34} - \lambda_{12}$$

相应地构造出来的代换则为

$$\begin{aligned} &i(\bar{\lambda}_{14} - \bar{\lambda}_{23}) + j(\bar{\lambda}_{24} - \bar{\lambda}_{31}) + k(\bar{\lambda}_{34} - \bar{\lambda}_{12}) \\ =&q(i(\lambda_{14} - \lambda_{23}) + j(\lambda_{24} - \lambda_{31}) + k(\lambda_{34} - \lambda_{12}))q^{-1}. \end{aligned} \tag{21'}$$

由此也看出来了, 在进行 Lorentz 代换 (19) 时, 如何以最简单的方式明显地写出每一个 $\lambda_{ik}$ 的代换式. 但是 Maxwell 方程组本身现在也可以概括成简洁的形式. 为此我们只需构造下述算符:

$$i\frac{\partial}{\partial x_1} + j\frac{\partial}{\partial x_2} + k\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_4} = \Diamond. \tag{22}$$

于是 Maxwell 方程组的两行就可以写成下面的简单形式:

$$\begin{cases} \text{I}\ \Diamond(i(\lambda_{14} + \lambda_{23})) + j(\lambda_{24} + \lambda_{31}) + k(\lambda_{34} + \lambda_{12}) = 0, \\ \text{II}\ (i(\lambda_{14} - \lambda_{23}) + j(\lambda_{24} - \lambda_{31}) + k(\lambda_{34} - \lambda_{12}))\Diamond = 0, \end{cases} \tag{23}$$

这一点可通过验算证实.

但是证明这一方程组在代换 (19) 或 (21) 与 (20) 作用下保持不变这一点不用中间计算就可得出. 这只要从对称性的考虑出发就足够了. 考虑 (19) 式中的因子 $\frac{q}{\sqrt{Nq}}$, 并令 $q' = 1$. 则方程组 I 保持不变, 因为所说的因子 $\frac{q}{\sqrt{Nq}}$ 置于符号 $\Diamond$ 之前, 而另一个因子 $i(\lambda_{14} + \lambda_{23}) + \cdots$ 则根本不发生改变. 但是方程组 II 首先取下述形式:

$$q(i(\lambda_{14} - \lambda_{23}) + j(\lambda_{24} - \lambda_{31}) + k(\lambda_{34} - \lambda_{12}))\overbrace{q^{-1}\frac{q}{\sqrt{Nq}}}\Diamond = 0,$$

其中符号 $\Diamond$ 前由水平曲括号括起来的最后两项 (人们可按照四元数乘法的结合律把它们合起来) 如果今后将不再考虑分母 $\sqrt{Nq}$ 的话, 将互相抵消, 因而只有前面的 $q$ 作为因子出现, 于是方程组的成立不会受影响. 公式 (19) 还可以再次加以推广, 这个推广形式是我们以后要用到的. 在 (19) 式分母上的是下述平方根式:

$$\sqrt{(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)}.$$

为了得出有理的表达式, 我们需要取下式, 看来这也不是什么约束条件, 令

$$a^2+b^2+c^2+d^2=a'^2+b'^2+c'^2+d'^2, \tag{24}$$

而且也为了用独立参数的有理函数来满足这个条件, 我们以表面上不对称的形式令:

$$\begin{aligned}&\frac{a-a'}{2}=A_1,\quad \frac{b-b'}{2}=B_1,\quad \frac{c-c'}{2}=C_1,\quad \frac{d+d'}{2}=D_1,\\&\frac{a+a'}{2}=A_2,\quad \frac{b+b'}{2}=B_2,\quad \frac{c+c'}{2}=C_2,\quad \frac{d-d'}{2}=D_2.\end{aligned} \tag{25}$$

对应于 (24) 式我们有

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2+D_1D_2=0, \tag{26}$$

因而这 8 个量中的一个可以通过其余 7 个量表示出来. 如果我们真的这样算, 对称性就要受损. 为此我们要把这 8 个量 $A_1,\cdots,D_2$ 全都保留下来, 并要求它们受到条件 (26) 的约束. 此外如我们令

$$\begin{aligned}iA_1+jB_1+kC_1+D_1&=Q_1,\\iA_2+jB_2+kC_2+D_2&=Q_2,\end{aligned}$$

我们就将有

$$\begin{aligned}q&=i(A_1+A_2)+j(B_1+B_2)+k(C_1+C_2)+(D_1+D_2)=Q_1+Q_2,\\q'&=-i(A_1-A_2)-j(B_1-B_2)-k(C_1-C_2)+(D_1-D_2),\end{aligned}$$

因而有

$$\begin{aligned}\frac{q'}{a^2+b^2+c^2+d^2}&=(i(A_1-A_2)+j(B_1-B_2)+k(C_1-C_2)+(D_1-D_2))^{-1}\\&=(Q_1-Q_2)^{-1}.\end{aligned}$$

从而公式 (19) 现在就可以写成

$$(\bar{u})(Q_1-Q_2)=(Q_1+Q_2)(u) \tag{27}$$

(其中 8 个量 $A_1, \cdots, D_2$, 我们已给它们加上了条件 (26), 显然是以齐次出现的, 所以在我们的公式中实质的参数个数具有正确的值 6). 顺便说一下, 从 (19) 式导致 (26) 式及 (27) 式的少量的中间计算已经在 Cayley 的原始著作中就有了; 只不过是完全相反的顺序 (所以公式 (19) 是作为结果给出的; 见 Crelles Journal 50, 1855 = Cayley 选集第 II 卷, 202 页及以后, 特别是其中的 213 - 215 页). 最后, 我们作出以下几点说明来结束本节:

1. 如果我们的实系数线性代换不是保持 $u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2$ 不变, 而是保持 $u_1^2+u_2^2+u_3^2-u_4^2$ 不变, 则必须把 (27) 式写成:

$$\begin{aligned}&(\bar{u}_4+\varepsilon(i\bar{u}_1+j\bar{u}_2+k\bar{u}_3))(Q_1-\varepsilon Q_2)\\ =&(Q_1+\varepsilon Q_2)(u_4+\varepsilon(iu_1+ju_2+ku_3)),\end{aligned}\tag{28}$$

其中 $\varepsilon$ 就是普通的虚数单位: $\varepsilon^2=-1$.

但是这时三维张量的变换公式 (21), (21′) 就要写成:

$$\begin{aligned}&(Q_1-\varepsilon Q_2)(i(\bar{\lambda}_{14}+\varepsilon\bar{\lambda}_{23})+j(\bar{\lambda}_{24}+\varepsilon\bar{\lambda}_{31})+k(\bar{\lambda}_{34}+\varepsilon\bar{\lambda}_{12}))\\ =&(i(\lambda_{14}+\varepsilon\lambda_{23})+j(\lambda_{24}+\varepsilon\lambda_{31})+k(\lambda_{34}+\varepsilon\lambda_{12}))(Q_1-\varepsilon Q_2)\end{aligned}\tag{29}$$

$$\begin{aligned}&(i(\bar{\lambda}_{14}-\varepsilon\bar{\lambda}_{23})+j(\bar{\lambda}_{24}-\varepsilon\bar{\lambda}_{31})+k(\bar{\lambda}_{34}-\varepsilon\bar{\lambda}_{12}))(Q_1+\varepsilon Q_2)\\ =&(Q_1+\varepsilon Q_2)(i(\lambda_{14}-\varepsilon\lambda_{23})+j(\lambda_{24}-\varepsilon\lambda_{31})+k(\lambda_{34}-\varepsilon\lambda_{12})).\end{aligned}\tag{29′}$$

2. 我们要来把这几个公式和前面的那几个综合起来, 办法就是, 我们决定放弃令 $\varepsilon^2=\pm1$, 因为我们还打算这样来推广, 使得

$$u_1^2+u_2^2+u_3^2\pm c^2u_4^2$$

保持不变, 其中我们取 $\varepsilon^2=\pm c^2$.

就是在这个地方有了这样的可能, Lorentz 群不仅在它针对光速 $c$ 的实数形式是合理的, 而且 Galilei–Newton 群也是在 $c=\infty$ 的极限情形下平滑地过渡出来的. 这我们只要在 (28) 式中补充上 $\varepsilon^2=0$ 的条件, 因而就是这样来算 $\varepsilon$, 就像人们在对待无穷小时所习惯做的那样.

由此我们就进入了所谓的*双四元数* (*Biquateriönen*) 的领域, 这是几何学家早就长期工作过的领域 —— 只不过是他们自然不会对 $u_1, u_2, u_3, u_4$ 作物理解释, 而是把它们看成是三维空间中的比例坐标 (Verhältniskoordinaten). 这样一来, 代换 (28), 依据对 $\varepsilon^2$ 所派定值的不同, 分别给出椭圆的, 双曲的和抛物的空间 $R_3$ 中的"运动" (我曾在当时建议采用 Cayley 对不同种类的射影度量所采用过的名称[1] 来称呼这些; 如果有人不按照大多数人的说法, 而根据 Riemann 的一般原理, 称之为

[1] 见本书第一卷, 151 - 155 页 (中译本 123 - 127 页).

正常曲率的或负常曲率的, 或零曲率的空间, 扯出这种高层的思想联系就没有什么太大的必要了).

将双四元数分成三类 (分别依据 $\varepsilon^2 = +1, -1$ 或 0 而定) 这件事, 人们习惯于将其归结于 Clifford, 他在留下的几篇分别写于 1873 年和 1876 年的未完成论文中对此曾有非常引人注目的、但并未结束的论述 (文集, 第 20 及 42 节). 如何才能借助于已取 $\varepsilon^2 = 0$ 的 (28) 式来可靠地掌控欧氏空间向各个方向的运动, Study 已经作了特别的研究 (Math. Ann. 39, 1891). 关于双四元数 —— 正好还有在它们与 4 个变量的正交代换的关系上 —— 的文献相当可观, 详情可在法文的数学百科全书的条目 I, 5, 由 Study 和 Cartan 写的 "复数" 中查阅 (见其中 第 35 - 36 节)[1] .

## §3 关于用积分关系式来代替 Maxwell 方程组

四元数仅仅是一个工具, 利用它我们能可靠地把 Maxwell 方程组的对称性再现出来. 我们已经一再指出过, Maxwell 本人在他的通论一书中根本就没有写出过微分方程组, 而建立的是积分关系 —— 这无疑是一种能够把实验测量结果直接表达出来的方法, 而且它通常有许多优点, 例如, 它能把电磁场中出现的不连续性的情形很简单地包括进来, 其数学方面似乎到最近才有了严格的深入研究; 我要特别提出已经讲到过的那篇 Bateman 发表在 1909 — 1910 年的 Proceedings of the London Mathematical Society VII (2) 上的文章.

我们还会讨论到多重积分, 在本节我们用 Graßmann 的层量来书写它们; 因此我们要用由微分构成的两行矩阵:

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ d'x_1 & d'x_2 & d'x_3 & d'x_4 \end{vmatrix}$$

的子行列式来给定一 "面元", "空间元" 则通过相应的三阶行列式, 而一 "世界元" 则通过四阶行列式, 等等来给出. 在引进了新的变量下的积分的行为完全可以和在普通书写方式下一样来看待.

举例来说, 设已给一 (展布在一任意的世界块 (Weltstück) 上的) 四重积分, 我们把它写成如下的形式:

[1] 我还要提起一个在那里也只是偶尔提到过的, 这样好的无名几何学家, Wiesbaden 地方的中学教师 Unverzagt. 远在 1871 年他就刻苦地研究了关于欧氏空间 $R_3$ 的一般的度量关系的四元数, 取得了丰硕的成果, 并就此写出来一份详尽的著述 (测角和测长的四元数理论, Wiesbaden, 1876). 其表述与我们所习惯的相比自然是另一类的, 我认为有点不太灵活. 看到这样一个无疑是很有天分的人, 由于未能得到平等的机会, 就被认为是一个无能的人, 真是一个悲剧.

$$\iiiint f(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ d'x_1 & \cdots & \cdots & d'x_4 \\ d''x_1 & \cdots & \cdots & d''x_4 \\ d'''x_1 & \cdots & \cdots & d'''x_4 \end{vmatrix} \tag{30}$$

现在我们令, 例如,

$$x_i = \varphi_i(y_1,y_2,y_3,y_4), \tag{31}$$

通过它可将 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 变成 $\bar{f}(y_1,y_2,y_3,y_4)$. 于是就直接得知, 变换后的积分为:

$$\iiiint \bar{f}(y_1,y_2,y_3,y_4)\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)}{\partial(y_1,y_2,y_3,y_4)}\begin{vmatrix} dy_1 & \cdots & \cdots & dy_4 \\ d'y_1 & \cdots & \cdots & d'y_4 \\ d''y_1 & \cdots & \cdots & d''y_4 \\ d'''y_1 & \cdots & \cdots & d'''y_4 \end{vmatrix}, \tag{32}$$

其中 $\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)}{\partial(y_1,y_2,y_3,y_4)}$ 为相应的函数行列式. 如果 (31) 式是一个 Lorentz 群的代换, 则这个行列式等于 1, 于是这时我们特别有: *如果 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 是这个群的一个不变量 (一 "标量"), 那么该积分也是这个群的不变量.*

对三重, 二重及单重积分有类似的结论. 一个三重积分要写成:

$$\iiint \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ d'x_1 & \cdots & \cdots & d'x_4 \\ d''x_1 & \cdots & \cdots & d''x_4 \end{vmatrix}, \tag{33}$$

如这里 $f_1,f_2,f_3,f_4$ 表一向量, 则这个积分就会是 Lorentz 群的不变量. 一个二重积分可以写成:

$$\iint \sum_{i,k} f_{ik}(dx_i d'x_k - d'x_i dx_k); \tag{34}$$

如果其中的 $f_{ik}$ 是一个六维张量, 则这个积分将是一 Lorentz 群的不变量. 但是在一般的代换 (31) 之下就会得出:

$$\iint \sum_{m,n} \bar{f}_{m,n}(dy_m d'y_n - d'y_m dy_n), \tag{35}$$

其中 $\bar{f}_{mn}$ 由 $f_{ik}$ 用如下的方式来组成:

$$\bar{f}_{m,n} = \sum_{i,k}\frac{\partial(\varphi_i,\varphi_k)}{\partial(y_m,y_n)}f_{ik} \tag{36}$$

(自然其中 $f_{ik}$ 里面的 $x_1, \cdots, x_4$ 要用 $y_1, \cdots, y_4$ 来表出).

接下来是几个定理, 在三维空间中习惯称之为 *Gauß* 定理和 *Stokes* 定理, 它们的更一般的形式 (对 $n$ 维空间中的 $m$ 重积分), 例如, 是由 Poincaré[1] 和 Goursat[2] 建立的. 在此我将只限于讨论一下二重积分的情形. 设该积分是在一闭曲面上取的, 这个闭曲面中包围着的是一三维空间部分. 展布在此曲面上的积分可用展布在此三维空间部分上的三重积分来代替. 因为 $f_{ik}$ 应为一个六维张量, 我们把它写成 $\lambda_{ik}$, 并和前面一样, 引入 $\mu_{ik} = \dfrac{\partial \Lambda}{\partial \lambda_{ik}}$, 则下式成立:

$$\iint \sum_{i,k} \lambda_{ik} \begin{vmatrix} dx_i & dx_k \\ d'x_i & d'x_k \end{vmatrix} = \iiint \begin{vmatrix} \sum\limits_k \dfrac{\partial \mu_{1k}}{\partial x_k} & \sum\limits_k \dfrac{\partial \mu_{2k}}{\partial x_k} & \sum\limits_k \dfrac{\partial \mu_{3k}}{\partial x_k} & \sum\limits_k \dfrac{\partial \mu_{4k}}{\partial x_k} \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ d'x_1 & d'x_2 & d'x_3 & d'x_4 \\ d''x_1 & d''x_2 & d''x_3 & d''x_4 \end{vmatrix}. \tag{37}$$

由此推出, 如果在整个 $R_4$ 中下述微分方程组成立:

$$\sum_k \frac{\partial \mu_{1k}}{\partial x_k} = 0, \quad \sum_k \frac{\partial \mu_{2k}}{\partial x_k} = 0, \quad \sum_k \frac{\partial \mu_{3k}}{\partial x_k} = 0, \quad \sum_k \frac{\partial \mu_{4k}}{\partial x_k} = 0,$$

则展布在任一闭曲面上的二重积分总是等于零. 如果 $\lambda_{ik}$ 还满足为此所必要的连续性条件的话*, 逆结论也能成立.

这样一来我们就自动地得出了 Maxwell 方程组. 实际上我们在前面是以下面的形式给出 Maxwell 方程组的:

$$\text{I.} \sum_k \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad \text{II.} \sum_k \frac{\partial \mu_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad 对\ i = 1, 2, 3, 4.$$

现在我们来把它们换成积分关系:

$$\begin{cases} \text{I.} \displaystyle\iint \sum_{i,k} \mu_{ik} (dx_i d'x_k - d'x_i dx_k) = 0, \\ \text{II.} \displaystyle\iint \sum_{i,k} \lambda_{ik} (dx_i d'x_k - d'x_i dx_k) = 0, \end{cases} \tag{38}$$

式中的积分是对任意的闭曲面来取的. 并且如果我们把 $\lambda_{ik}$ 或 $\mu_{ik}$ 看成是一个六维向量的分量 (并按相应的规则变换), 我们由此就直接获得了 Maxwell 方程组对任一 Lorentz 变换的不变性. 但是借助于不太复杂的计算我们就能发现, 我们的方程组对 $x_1, \cdots, x_4$ 的任意连续变换, 因而也就是对我们在上面 (BI. §7, 末尾) 所讲到的整个 $G_{15}$, 保持不变, 但对其他种类的变换则否. 关于这一点可参考在 79 页 (中译本 71 页) 上所提到的 Bateman 的著作.

[1] Acta Mathematica 9 (1887).

[2] Liouville Journal (6), 第 4 卷, (1908).

## §4 四维势以及与之相关的变分定理

引进所谓四维势 $(q_1, q_2, q_3, q_4)$ 与前一节讲述有直接的联系. 由于我们对任一闭曲面所取的不变二重积分

$$\iint \sum_{i,k} \lambda_{ik}(dx_i d'x_k - d'x_i dx_k)$$

等于 0, 它对一有边曲面取积分将等于一沿该边缘曲线所取的单重积分

$$\int (q_1 dx_1 + q_2 dx_2 + q_3 dx_3 + q_4 dx_4), \tag{39}$$

由此根据广义 Stokes 定理就得出以下结论: 可以令

$$\lambda_{ik} = \frac{\partial q_k}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_k} = \mathrm{Rot}q \tag{40}$$

(从而 Maxwell 方程组 II 恒得以满足). 在这里我们还可以在 $q_1, \cdots, q_4$ 上分别加上 $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \frac{\partial f}{\partial x_4}$ 而不会导致 $\lambda_{ik}$ 发生改变, 其中 $f$ 为 $x$ 的任意函数, 但要满足必需的单值性和连续性条件. 由于这一点, 我们就可以通过适当地选择这个函数 $f$, 使得 $q$ 能满足其大散度为零这样的条件:

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \frac{\partial q_3}{\partial x_3} + \frac{\partial q_4}{\partial x_4} = 0. \tag{41}$$

这样一来, 由于 (40) 式的不变性, $q$ 对于 Lorentz 变换就具有向量分量的特性.

这个完美的结果, 它提供了极其简化的形式, 在 Maxwell 本人那里就有了萌芽, 但看样子其完全的呈现是到了 1898 年才由 Liénard 提了出来 (《电照明》, 第 16 卷). 但是自然还是以非对称的形式提出来的, Lorentz 在他的《Enzyklopädiereferates (百科全书评论)》V, 14 的 第 4 节中也使用过它, 当时他写的是:

$$\begin{aligned}(X, Y, Z) &= -\frac{1}{c}\frac{\partial a}{\partial t} - \mathrm{grad}\varphi, \\ (L, M, N) &= \mathrm{rot}a,\end{aligned} \tag{42}$$

其中 $a$ 理解为 (三维空间中的) 一个三元的 "向量势" $(a_1, a_2, a_3)$, 而 $\varphi$ 则为标量势. 如果在这里按我们先前的规定写下

$$\begin{aligned} iX &= \lambda_{14}, \quad iY = \lambda_{24}, \quad iZ = \lambda_{34}, \\ L &= \lambda_{23}, \quad M = \lambda_{31}, \quad N = \lambda_{12}, \end{aligned}$$

再将 $x, y, z, ict$ 分别写为 $x_1, x_2, x_3, x_4$, 并且最后取

$$a_1, a_2, a_3, \varphi = -q_1, -q_2, -q_3, iq_4 \text{[1]}, \tag{43}$$

[1] $q_1, q_2, q_3$ 前的负号对应于这种情况, 即 Lorentz 是采用 $(x, y, z)$ 的右手坐标系, 而我们则跟随 Hertz, 用的是左手坐标系.

我们就会准确地回到公式 (40). 这些对称的公式自然是由 Minkowski 引入的; 请参考他于 1907 年 11 月在 Göttingen 数学协会上的讲演[1] .

现在我们把表达式 (40) 带到 Maxwell 方程组中来. 于是我们就得到下述四个方程:

$$\Box q_i - \frac{\partial \mathrm{Div} q}{\partial x_i} = 0, \tag{44}$$

再借助于 (41) 式, 我们就由此得:

$$\Box q_i = 0. \tag{45}$$

电磁场的微分方程组就此化简到了它的最简单的形式[2] . 进一步的发展是, 我们把 Maxwell 方程组

$$\sum_k \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad \text{对 } i = 1, 2, 3, 4$$

与一变分定理联系起来. 我们要写下:

$$\delta \overline{\underline{\iiiint}} \sum_{i,k} \lambda_{ik}^2 dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = 0^{[3]}\ , \tag{46}$$

其中要令

$$\lambda_{ik} = \frac{\partial q_k}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_k},$$

并且要这样来作变分, 即让 $q_1, \cdots, q_4$ 作一任意的改变 $\delta q_1, \cdots, \delta q_4$ (只要它们在边界上必须为零, 这一点在积分符号的上下用水平线来表示这个意思), 实际上我们用平常的法则来求变分 $\delta J$:

$$\delta J = \overline{\underline{\iiiint}} \left[ \sum_i \delta q_i \left( \sum_k \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial q_i} \right) \right] dx_1 dx_2 dx_3 dx_4. \tag{47}$$

它就立即导致了 Maxwell 方程组 I.

Maxwell 方程组对 Lorentz 变换的不变性就再次直接显露出来了, 这是因为 $\sum\limits_{i,k} \lambda_{ik}^2$ 对这个变换而言是一个标量. 不过这也能从它们之间存在下述微分关系:

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_k \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial q_k} \right) = 0$$

[1] 见 74 页 (中译本 68 页).

[2] 请注意这里与 61 页 (中译本 57 - 58 页) 上的公式 (3) 和 (4) 在形式上的相似性. (H.)

[3] 我们又回到了体积元的通常的记号 $dx_1 \cdot dx_2 \cdots dx_n$.

直接看出来. 而且如果我们在 $q_i$ 上增加一个任意的 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $\lambda_{ik}$ 仍然保持不变. 相应地我们将变分 (47) 式中的 $\delta q_i$ 写为 $\dfrac{\partial \delta f}{\partial x_i}$, 则得到下述恒等方程式:

$$\overline{\underline{\iiiint}}\left[\sum_i \frac{\partial \delta f}{\partial x_i}\left(\sum_k \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial q_i}\right)\right] dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = 0;$$

借助于分部积分的变形可得对任意的 $\delta f$ 有:

$$\overline{\underline{\iiiint}}\delta f\left[\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_k \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial q_k}\right)\right] dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = 0,$$

由此就得到了所述的关系式. 将这里的完全对称的变分定理与我们在第一卷, 第 5 章中根据 Mac Cullagh 所讲的非对称的结果做一对比, 是很有意思的. 为了得到最后的结果, 在我们至今的讲述中只假定了 $q_4 = 0$ (这实质上没有什么限制, 而只不过是让 $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3$ 显现出来).

当涉及引进新变量时, 变分定理就特别有用. 这个法则我们将来在证明 Maxwell 方程组对 $x_1, \cdots, x_4$ 最一般的共形变换, 即起如下作用的变换:

$$(dx_1^2 + \cdots + dx_4^2) = \rho^2(dy_1^2 + \cdots + dy_4^2) \quad (\rho \neq 0) \tag{48}$$

保持不变, 因而也就是在整个 $G_{15}$ 的作用下保持不变时, 还要用到. 变分定理 (46) 式:

$$\delta \overline{\underline{\iiiint}}\left(\sum_{i,k} \lambda_{ik}^2\right) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = 0$$

在任意的共形变换下保持不变, 我们的证明就是简单地以这一点为基础的.

和在 (31) 式中一样, 设

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, y_3, y_4).$$

那么首先, 正如 Jacobi 在当年讲到过的, 我们要将

$$dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 \cdot dx_4 \text{ 代换成 } D \cdot dy_1 \cdot dy_2 \cdot dy_3 \cdot dy_4, \tag{49}$$

其中 $D$ 理解为函数行列式

$$D = \frac{\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_4)}{\partial(y_1, \cdots, y_4)},$$

而这一点我们已经借助于 Graßmann 的书写方式在 (30) 式, (32) 式中作了直观的说明.

剩下来的还要研究

$$\sum_{i,k}\lambda_{ik}^2=\sum_{i,k}\left(\frac{\partial q_k}{\partial x_i}-\frac{\partial q_i}{\partial x_k}\right)^2$$

是如何变化的.

首先, 对 $dx_i$ 我们有下述齐次线性代换:

$$dx_i=\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_1}dy_1+\cdots+\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_4}dy_4 \tag{50}$$

(它们的行列式刚好就是函数行列式 $D$). 算子 $\dfrac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x_4}$, 同样还有 $q_i$, 它们相对于 $dx_i$ 的变化行为是逆步的 (后者是因为 $q_1dx_1+\cdots+q_4dx_4$ 是一个不变量). 举例来说, 我们有:

$$\bar{q}_i=\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_i}q_1+\cdots+\frac{\partial\varphi_4}{\partial y_i}q_4 \tag{51}$$

(其中我们用在 $q_i$ 的上面加一横杠来表示变换后的 $q_i$). 接下来的就是要计算变换后的 $\lambda$, 因而也就是计算量

$$\bar{\lambda}_{ik}=\frac{\partial\bar{q}_k}{\partial y_i}-\frac{\partial\bar{q}_i}{\partial y_k}. \tag{52}$$

人们一开始可能认为, 式中会出现 $\varphi$ 对 $y$ 的二阶导数. 但是计算表明, 这些遇到过的项刚好都互相抵消了. 一切运行得就好像在线性代换 (50), (51) 中的系数都是常数一样. 只要我们还和从前一样, 留在初等不变量理论的范围内: $\lambda_{ik}$ 的行为就会和由两行对 $dx$ 为逆步的量所组成的行列式一样.

我们甚至还是在正交代换的范围内, 只不过是 $\sum dx_i^2$ 借助 (48) 式, 不是变成 $\sum dy_i^2$, 而是恰好变成 $\rho^2\sum dy_i^2$. 稍加思考就可见, 代换行列式 $D$ 这时已不再是 $\pm1$, 而是 $\pm\rho^4$, 而另一方面, $\sum\lambda_{ik}^2$ 则变成了 $\sum\bar{\lambda}_{ik}^2:\rho^4$, 这二者在积分符号下出现的 $\rho$ 的幂次互补, 因而正好互相抵消, 所以积分在变换下, 除了可能发生符号改变外, 是不变的. 但是如果我们令积分的变分 $=0$, 这个符号改变就没有什么意义. 因而 Maxwell 方程组就实际上保持不变.

## §5 我们的四维分析在具体问题上的应用举例

作为保持 Maxwell 方程组不变的变换群, 我们有:

1. Lorentz 群,

2. 包含这个 Lorentz 群的共形群 $G_{15}$,

并且产生了我们可以拿它们做些什么用的问题.

在所有这种应用中对数学思想而言呈现两个层次:

a) 用变换从已知的关系中得出新的关系来,

b) 将思维习惯一直发展到抽象的级别, 这样人们只要知道, 哪些是在群的作用下保持不变. 这一发展过程我们已经在第一卷的第 4 章中以一新几何为例讲述过, 这一新几何是由空间的射影变换给出的: 那些训练有素的射影几何学家, 把几何学前辈所完成的、并把它们看成是重要的那些结果, 认为都可用射影变换得到, 它们只不过是自明的事; 对于他们来说它们是同一个思想的不同文本.

正是 Lorentz 群在上面所指明的含义下的这两个层次, 是我们要从头到尾讲一下的. 原来 —— 在 Lorentz 本人, 以及在 Larmor 等人那里 —— 只是 a) 意义下的一种辅助工具, 通过 Poincaré, 以及首先是通过 Einstein 以及 Minkowski, 它们才变成了一种与观点 b) 相应的 "世界观" 的基础.

至于谈到 $G_{15}$, 它可能还没有吸引到太多的注意. 它至今还只是在 a) 的意义下被应用着, 至于向 b) 的过渡, 我曾就此问过物理学家, 他们的感觉是对此彻底反对.

由于本书是一本评论性质的书, 我们今后也几乎只谈 $G_{10}$; 在此我不会一开始就许诺止步于传统的三维情形, 相反, 我们要在一开始就把四维出发点的全部简单性凸现出来.

在本节中我们来谈 Lorentz 群在 a) 意义下的应用. 我在这里只提出两个问题, 二者都涉及单个电子. 它的瞬时坐标可以用 $x_1, \cdots, x_4$ 来标记. 于是, 为了不至于导致非对称性, 我们必须改变速度的概念 (它隐含了 $x_4$ 的特殊地位). 我们宁可把 $x_1, \cdots, x_4$ 对不变弧长元

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2} \tag{53}$$

来微分, 并将下述微分系数的总体:

$$\frac{dx_1}{ds} = x_1', \cdots, \frac{dx_4}{ds} = x_4' \tag{54}$$

当做方向向量; 自然这时有

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = 1. \tag{55}$$

如果我们写下在一瞬时适当的 Lorentz 变换, 使得有

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0 \text{ 以及同样有 } x_1' = x_2' = x_3' = 0,$$

这里我们设取 $x_4' = +1$, 我们就可以得到对速度的通常的理解. Minkowski 把这种前面三个方向向量的分量为零的事认为是: *把电子变换成静止*. 然后我们来对这样一个静止的电子求出它的传统的物理知识, 即用一个任意的 Lorentz 变换导出它的普遍定律.

*第一个问题: 一给定电磁场对一作任意运动的电子的作用.*

给定的是 $\lambda_{ik}$, 根据先前所做的规定, 它们与平常用的 $X, Y, Z, L, M, N$ 之间的

关系为:

$$\varepsilon X = \lambda_{14}, \quad \varepsilon Y = \lambda_{24}, \quad \varepsilon Z = \lambda_{34}, \quad (\varepsilon = \sqrt{-1})$$
$$L = \lambda_{23}, \quad M = \lambda_{31}, \quad N = \lambda_{12}.$$

我们由此来构造一个四维力, 即一个作用在电子上的四维向量, 它的前三个分量 $P_1, P_2, P_3$ 对应于普通力学中力的三个分量, 而其第四个分量 $P_4$ 应该这样来算, 使得在任何时候都有

$$x_1' P_1 + x_2' P_2 + x_3' P_3 + x_4' P_4 = 0. \tag{56}$$

于是根据传统的物理规律, 一个带电荷为 $e$, 静止于一给定的电磁场中的电子所受的四维力就应写为:

$$P_1 = eX, \quad P_2 = eY, \quad P_3 = eZ, \quad P_4 = 0, \tag{57}$$

因而用 $\lambda_{ik}$ 来表示为:

$$P_1 = -\varepsilon e \lambda_{14}, \quad P_2 = -\varepsilon e \lambda_{24}, \quad P_3 = -\varepsilon e \lambda_{34}, \quad P_4 = 0. \tag{57'}$$

此外我们提出一个公设, 认定对一个运动中的电子, 它所受的四维力还仅仅只与一阶微商 $x_1', \cdots, x_4'$ 相关, 而且甚至是线性相关. 这样一来就可以清楚地看出, 公式 (57) 可以看成是下述一般公式:

$$P_1 = -\varepsilon e \sum_k \lambda_{1k} x_k', \cdots, P_4 = -\varepsilon e \sum_k \lambda_{4k} x_k' \text{[1]} \tag{58}$$

的一个特殊情形.

到此我们的问题就已经解决了; 但是我们还要对电子在给定力场中的运动讲几句. 仿照与通常力学的对比我们令 (其中 $m$ 表示与电子联结在一起的惯性质量):

$$m x_i'' = P_i = -\varepsilon e \sum_k \lambda_{ik} x_k'. \tag{59}$$

我们再把这里的 $\lambda_{ik}$ 用场的四维势 $q$ 表出, 这些微分方程又能优美地纳入一个变分定理的形式 (它相当于通常力学中的 Hamilton 原理):

$$\delta \overline{\underline{\int}} \left( \frac{m}{2} \sum_i x_i'^2 + \varepsilon e \sum_i q_i x_i' \right) ds = 0 \tag{60}$$

---

[1] 因为根据 81 页 (中译本 74 页) 的 (13) 式, 无论如何 (58) 式都是表示一个向量, 而且 $\sum_{i=1}^{4} x_i' P_i$ 是一个不变量. 对于 $x_1' = x_2' = x_3' = 0, x_4' = 1$ 这个特殊参照系, 其分量具有由 (57′) 式所给的值, 因而有 $\sum_{i=1}^{4} x_i' P_i = 0$, 即 (56) 式得到满足. 从而 (56) 式在任何参照系统中都能成立.

(要进行变分的是 $x_i$; 积分号上的横杠, 和以前一样, 表示在积分限上的变分为零). 实际上, 我们可按照变分法的一般规则从 (60) 式导出下述方程:

$$\frac{d\dfrac{\partial(\ )}{\partial x_i'}}{ds}-\frac{\partial(\ )}{\partial x_i}=0,$$

所以我们正好回到了公式 (59). —— 因为 $\sum x_i'^2=1$, 我们可以将变分原理 (60) 式换成下面的式子, 这对某些观点是有好处的,

$$\delta\overline{\int}\left(m\sqrt{\sum_i x_i'^2}+\varepsilon e\sum_i q_i x_i'\right)ds=0. \tag{61}$$

这里所有的项都是 $x_i'$ 的一阶齐次项, 因而我们也可以把它写成:

$$\delta\overline{\int}\left(m\sqrt{\sum_i dx_i^2}+\varepsilon e\sum_i q_i dx_i\right)=0. \tag{61'}$$

第二个问题: 关于一个做匀速运动电子的电磁场.

为了避免并排写太多的下标, 我又要回过来把 $x_1,x_2,x_3,x_4$ 换成 $x,y,z,l$, 而且 $x_1',x_2',x_3',x_4'$ 就直接写成 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ (自然这时有 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=1$). 一个电子, 如果它在 $R_4$ 中划出一条直线, 我们就说它做匀速运动, 因而这时它的坐标就可写成以下形式:

$$x_0+s\alpha,\quad y_0+s\beta,\quad z_0+s\gamma,\quad l_0+s\delta. \tag{62}$$

确定场的目标就是要寻求相应的四维势. 我们再次将电子的运动起点选为坐标的原点, 并将电子运动变换到静止, 因而我们令

$$x_0=y_0=z_0=l_0=0;\quad \alpha=\beta=\gamma=0,\quad \delta=1.$$

在这个坐标系中可以把流动坐标记为 $\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{l}$. 于是初等的物理直观就告诉我们四维势如下:

$$\bar{q}_x=0,\quad \bar{q}_y=0,\quad \bar{q}_z=0,\quad \bar{q}_l=-\frac{\varepsilon e}{\bar{r}}, \tag{63}$$

其中 $\bar{r}=\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2+\bar{z}^2+\bar{l}^2}$ 以及 $\varepsilon=\sqrt{-1}$. 实际上, 由此下述方程组能成立:

$$\Box\bar{q}_x=\cdots=\Box\bar{q}_z=0,\quad \mathrm{Div}\bar{q}=0.$$

现在我们来用 91 页 (中译本 83 页) 的公式 (40) 计算电磁场的分量:

$$\bar{X}=-\varepsilon\bar{\lambda}_{14}=\frac{e\bar{x}}{\bar{r}^3},\quad \bar{Y}=-\varepsilon\bar{\lambda}_{24}=\frac{e\bar{y}}{\bar{r}^3},\quad \bar{Z}=-\varepsilon\bar{\lambda}_{34}=\frac{e\bar{z}}{\bar{r}^3},$$

$$\bar{L}=0,\qquad \bar{M}=0,\qquad \bar{N}=0,$$

这与传统的观点结果是一致的.

现在要来做的就是将四维势 (63) 式推广到由 (62) 式所表示的一般情况中去. 我指出解的结果如下:

$$q_x = -\frac{\varepsilon e\alpha}{R}, \quad q_y = -\frac{\varepsilon e\beta}{R}, \quad q_z = -\frac{\varepsilon e\gamma}{R}, \quad q_l = -\frac{\varepsilon e\delta}{R}, \tag{64}$$

其中 $R$ 的表达式如下:

$$R = +\sqrt{((x-x_0)^2 + \cdots + (l-l_0)^2) - (\alpha(x-x_0) + \cdots + \delta(l-l_0))^2}. \tag{64'}$$

其证明只要注意到, (64) 式确定一个四维向量 (因为 $R$ 中的各项都是标量), 而且 (64) 式在特殊情况下会过渡到 (63) 式. 此外, 正如人们在特殊情况下容易看到的, $R$ 可以解释成点 $x, y, z, l$ 到电子所画出的世界直线 (62) 式的垂直距离.

那个在世界直线上随机挑出的点 $x_0, y_0, z_0, l_0$ 在 (64) 式, (64′) 式中不起什么特别的作用. 因为我们可以看出, $R$ 也可以写成下述形式:

$$R = \sqrt{\sum p_{0ik}^2},$$

其中 $p_{0ik}$ 是下述矩阵的二阶子行列式:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 & l-l_0 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix},$$

当人们用一般的表达式 (62) 来替换 $x_0, y_0, z_0, l_0$ 时, 它们这方面是肯定不会改变的.

人们可以利用这个情况来进一步简化公式 (64), (64′). 即我们这样来选在世界直线上的点 $x_0, y_0, z_0, l_0$, 使得有

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 + (l-l_0)^2 = 0^{[1]}.$$

于是有

$$q_x = -\frac{e\alpha}{P}, \quad q_y = -\frac{e\beta}{P}, \quad q_z = -\frac{e\gamma}{P}, \quad q_l = -\frac{e\delta}{P}, \tag{65}$$

其中

$$P = (\alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0) + \gamma(z-z_0) + \delta(l-l_0)). \tag{65'}$$

这个这样写出来的结果是那样一个公式的特例, 这个公式是 Liénard 于 1898 年 (《Eclairage électrique (电照明)》的第 16 卷), 以及独立于他的 Wiechert (《Archives Neerlandaises (荷兰文献集)》, 1900, 549 页) 对一个任选的 (设想为点状的) 电子的四维势所建立的; 我们还会回到这个公式上来 (115 页 (中译本 105 页)).

[1] 由此 $x_0, y_0, z_0, l_0$ 还有一个符号是未定的, 我们将在下一节来处理这个唯一性的问题.

上面处理的两个例子可以算是 Lorentz 群 $G_{10}$ 在上面用 a) 标志的意义下的应用的例子. 如果我们在上面的第二个例子中, 将应用 $G_{10}$ 代之以应用共形变换群 $G_{15}$, 我们就得到电子的这样一种运动情形, 这时它在 $x, y, z, l$ 的 $R_4$ 的一个圆周之上, 因而在 $x, y, z, t$ 的空间中就会在一条双曲线上运动, 其渐近线与锥体 $dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 = 0$ 的两条母线平行. Born 所讲的 (一个电子的) "双曲运动" 就正是这种情形. —— 指出这点之后我该就此打住.

## §6 Lorentz 群的相对论

我们现在要来稍微详细一点地讲一讲上一节提到的 b) 点了.(按照 b) 点) 也就是说只有那些对 Lorentz 群为不变的结论才有意义; 例如, 一个标量具有确定的数值, 又如, 一个四维向量或一个十维张量恒等于零, 或一个十维张量的向量散度恒等于零, 如此等等. 物理学的一切论断都必须总结成具有这一特质. 这是相对论性的思维方式的本质, 我们把这看成是这个理论的终极结论.

可惜物理学的现代表述的发展走得还不够远, 以致我们在这里还拿不出大量的例子.

所以我们在这里只是着重指出, 与传统物理的观念相对比, 那里作为标量出现的量, 现在既可能仍是标量, 也还可能是一个四维向量的第四分量, 或还可能是一个十维张量的最后一个分量 (正如只要人们能看到, 如果我们令 $l' = l$, Lorentz-$G_{10}$ 就简化成 Euklid 的 $G_6$; 一个四维向量的第四个分量以及一个十维张量的最后的一个分量从而就会保持不变).

当我们引入 (一电子的) 质量 $m$ 和电荷 $e$ 时, 我们是把它们当做标量来引入的, 这从上节的 (59) 式就可以看出.

电磁场的标量势 (§4 中公式 (42) 中的 $\varphi$) 是四维向量的一个分量, 而它的比能量 (即能量密度) 则是一个十维张量的一个分量 (我们在 §1 的末尾已经提到过).

为了使这个特别重要的十维张量 (§1 中的公式 (17)) 与传统物理的联系更加清楚地凸显出来, 我还要把它用分量 $X, Y, Z, L, M, N$ 写出来, 写的时候把最后一行和最后一列各项中的因子 $\varepsilon c$ 分离出来. 于是结果为:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}
\frac{1}{2}\begin{pmatrix} L^2 - M^2 - N^2 \\ +X^2 - Y^2 - Z^2 \end{pmatrix} & LM + XY & LN + XZ & \dfrac{NY - MZ}{c} \\
LM + XY & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} M^2 - N^2 - L^2 \\ +Y^2 - X^2 - Z^2 \end{pmatrix} & MN + YZ & \dfrac{LZ - NX}{c} \\
LN + XZ & MN + YZ & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} N^2 - L^2 - M^2 \\ +Z^2 - X^2 - Y^2 \end{pmatrix} & \dfrac{MX - LY}{c} \\
\hline
\dfrac{NY - MZ}{c} & \dfrac{LZ - NX}{c} & \dfrac{MX - LY}{c} & -\frac{1}{2c^2}\begin{pmatrix} L^2 + M^2 + N^2 \\ +X^2 + Y^2 + Z^2 \end{pmatrix}
\end{array}\right) \tag{66}$$

它的分量逆步于下述各量

$$dx^2, 2dxdy, dy^2, \cdots, dt^2.$$

我们在 (66) 式中用横隔线把其中的项这样来相互分隔开, 为的是这样可以得到它们传统的物理解释:

最后一项的意义, 我们已经说过, —— 现在只是多了个负号 —— 是*比能量*.

最下面的横行, 或最右边的纵行 (列) 中另三个项, 我们把它们称为*电磁冲量* (*elektromagnetischen Impuls*).

但是头九个项, 人们特别把它们称为介质的 Maxwell 应力.

十维张量 (66) 现在还有一个重要的性质, 即它们的向量散度恒为零.

第四横行现在可以写成:

$$\frac{\partial\left(\dfrac{NY-MZ}{c}\right)}{\partial x}+\frac{\partial(\,)}{\partial y}+\frac{\partial(\,)}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{L^2+M^2+N^2+X^2+Y^2+Z^2}{2c^2}\right). \tag{67}$$

它所表示的就是 Poynting 首先给出的 (Phil. Transactions 1884) *能量守恒定律*: 冲量分量被看成是 "能流的分量 (Strömungskomponenten der Energie)" (因此人们也把它说成是 Poynting 流).

但这里也同时说明, 这个定理也只与第四行相关; 其他三个则是说对应于 Maxwell 应力的每一横行可以看成是每一冲量分量的 "(冲量) 流分量 (Strömungskomponent)". 因而能量定理和冲量定理又再度融合成一个整体, 正如我们已经在 A, §2 中对经典力学的领域所指出过的那样.

这一普遍的论述就足够了! 我们老一辈的研究者, 只有靠着不断的努力, 完成了这个物理观念的内在转变, 正如后来的 Lorentz 群的相对论所达到的; 完全地在这个新的思维方式下成长则是青年一代人的任务了[1].

## III 回归 Lorentz 群的实数关系

现在我们要来谈论, 当我们再度把 $x, y, z, l$ 换成 $x, y, z, \varepsilon ct$ (此处 $c$ 表光速) 时所必须作的一些规定和变动, 并就此限于只考虑 $x, y, z, t$ 取实数值. 我们随 Minkowski 把这些实数的 $x, y, z, t$ 总体称之为*世界* (*Welt*).

[1] 自然会问, 共形群 $G_{15}$ 的相对论是否会对物理思想产生同样的作用. 我认为不会. Lorentz 群对经典理论的 Galilei–Newton 群的全部偏离, 在根源上与后者还总是有一定的关联, 这种关联从下一点可以最清楚地表明出来, 即后者是前者在光速提高到无限大时的极限情形 (见 §2, 87 页 (中译本 79 页)). 而过渡到共形群 $G_{15}$ 则要做许多根本的改变. 人们只要想一下, 群 $G_{15}$ 的任意一个变换都被理解为对半径取倒数, 因而用它就有可能将任意一个空间 - 时间点 $x_0, y_0, z_0, t_0$ 变到无穷远. —— 就这一点 (因为它取消了有限远和无限远之间的区别), 射影几何的思维方式不可能在物理中真正扎根.

## §1 导论

1. 在齐次 Lorentz 变换下保持不变的二次型现在是:

$$f=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-c^2(t-t_0)^2. \tag{1}$$

如果我们令 $\sqrt{f}$ 表两个世界点之间的距离, 则对两个无限靠近的点的距离 $ds$, 我们就有

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2.\text{[1]} \tag{2}$$

除了弧元的长度 $ds$ 之外 —— 与二次型的不定性相对应 —— 我们再以适当的方式规定弧元一个时间段 (*Dauer*)[2] $d\tau$. 我们令:

$$d\tau^2=dt^2-\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{c^2}. \tag{3}$$

2. 同步变换和逆步变换现在已不再是完全一致了. 微分形式 (2) 的极式:

$$dxd'x+dyd'y+dzd'z-c^2dtd't \tag{4}$$

显然无论何时都是标量. 另一方面线性型

$$ud'x+vd'y+wd'z+\bar{w}d't \tag{5}$$

也会是一个标量. 显然, 和 $dx,dy,dz,-cdt$ 一样, $u,v,w,\bar{w}$ 对 $d'x,d'y,d'z,d't$[3], 因而也就是对 $dx,dy,dz,dt$, 作逆步代换. 对它们来说, 也可以用下述二次式:

$$u^2+v^2+w^2-\frac{\bar{w}^2}{c^2} \tag{6}$$

来作基本二次型. 与此相适应现在我们就要处处注意区分两类 (互相对偶的) 四维向量.

3. 特别是下述符号

$$\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial t}$$

---

[1] 自然我们可以把这个微分形式放在首位, 这种写法更简捷; 但是我要强调, 在 Lorentz 群这里我们还要与初等不变量理论的代数原理, 因而也就是要与 Graßmann–Cayley 的概念打交道, 而并不是想要追随 Riemann 将一个一般的 $ds^2=\sum a_{ik}dx_idx_k$ (其中 $a_{ik}$ 依赖于 $x$ 的方式为 “任意”) 置于首位.

[2] Dauer 与 Time 的概念不同, 后者是瞬时的, 但在一些中文文献中, 为了方便起见, 有时也简称为时间. —— 中译者注

[3] 这里原文为 $dx',dy',dz',dt'$, 为了与 (4) 式及 (5) 式, 以及后面的式子一致起见, 改写如左. —— 中译者注

现在对 $dx, dy, dz, dt$ 是逆步的. 这样一来能从给定的标量 $f$ 求导得出的一阶标量就是

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2, \tag{7}$$

用 □ 来表示下述二阶微分算子:

$$\square=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}. \tag{8}$$

但第二类向量场的大散度则为:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{w}}{\partial t}=\mathrm{Div}(u). \tag{9}$$

4. 以前的正交代换

$$d'x=\alpha_{11}dx_1+\alpha_{12}dx_2+\alpha_{13}dx_3+\alpha_{14}dx_4$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

现在要写成下面的形式:

$$\begin{aligned}
d'x&=\alpha_{11}dx+\alpha_{12}dy+\alpha_{13}dz+\varepsilon c\alpha_{14}dt,\\
d'y&=\alpha_{21}dx+\alpha_{22}dy+\alpha_{23}dz+\varepsilon c\alpha_{24}dt,\\
d'z&=\alpha_{31}dx+\alpha_{32}dy+\alpha_{33}dz+\varepsilon c\alpha_{34}dt,\\
d't&=\frac{\alpha_{41}dx+\alpha_{42}dy+\alpha_{43}dz}{\varepsilon c}+\alpha_{44}dt.
\end{aligned} \tag{10}$$

因为我们先前已规定只限于 $x, y, z, t$ 的实代换, 所以必须令 $\alpha_{14}, \alpha_{24}, \alpha_{34}$ 以及 $\alpha_{41}$, $\alpha_{42}, \alpha_{43}$ 取为纯虚数, 而令其余的 $\alpha_{ik}$ 取为实数, 这一点只要通过令 $dx, dy, dz, dt$ 取一组特定的值就很容易看出.

用双四元数来独立地表达以上所定义的齐次 Lorentz 代换可以由上一部的 §2 如下来做: 令

$$\varepsilon'=\frac{\sqrt{-1}}{c},$$

再令 $Q_1, Q_2$ 为实四元数[1]:

$$Q_1=iA_1+jB_1+kC_1+D_1,$$

$$Q_2=iA_2+jB_2+kC_2+D_2,$$

它还要满足下述“正交性条件”:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2+D_1D_2=0.$$

[1] 即 $A_1, \cdots, D_2$ 为实数.

于是代换 (10) 就可写成如下的形式:

$$\begin{aligned}&(d't+\varepsilon(id'x+jd'y+kd'z))(Q_1-\varepsilon Q_2)\\&=(Q_1+\varepsilon Q_2)(dt+\varepsilon(idx+jdy+kdz)).\end{aligned}\tag{11}$$

5. 现在我们来谈四维势 $q_x, q_y, q_z, q_t$, 并由此来写下 Maxwell 方程组. 我们这个新的 $q$ 应该看成是第二类向量, 因为我们还有, 正如在 91 页 (中译本 83 页) 所指出过的, $q_x dx + q_y dy + q_z dz + q_t dt$ 应该是标量. 因而它们与以前的 $q_1, q_2, q_3, q_4$ 之间的关系为:

$$q_x = q_1, \quad q_y = q_2, \quad q_z = q_3, \quad q_t = \varepsilon c q_4. \tag{12}$$

散度条件为:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial q_z}{\partial z}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial q_t}{\partial t}=0. \tag{13}$$

电磁场的场量这时就由下述矩阵的子行列式给出:

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\varepsilon c\partial t}\\ q_x & q_y & q_z & \dfrac{q_t}{\varepsilon c}\end{vmatrix}.$$

注意到我们已经令

$$\lambda_{14}=\varepsilon X, \quad \lambda_{24}=\varepsilon Y, \quad \lambda_{34}=\varepsilon Z, \quad \lambda_{23}=L, \quad \lambda_{31}=M, \quad \lambda_{12}=N,$$

所以我们就得到:

$$\begin{aligned}X&=\frac{\partial q_x}{c\partial t}-\frac{\partial q_t}{c\partial x},\cdots,\\L&=\frac{\partial q_z}{\partial y}-\frac{\partial q_y}{\partial z},\cdots,\end{aligned}\tag{14}$$

如果在其中将 (三维的) 向量势 $a=-(q_x,q_y,q_z)$ 及其 “标量” 势 $\varphi=\frac{q_t}{c}$ 代入, 则所得就与在 92 页 (中译本 83 页) 上由 Lorentz 所给出的公式一致了 (见该页上的公式 (43)). 但是我们新的 $q$ 除了满足 (13) 式外, 还满足下述方程组:

$$\Box q_x=0, \quad \Box q_y=0, \quad \Box q_z=0, \quad \Box q_t=0, \tag{15}$$

其中 $\Box$ 理解为算子 (8) 式.

## §2 几何的辅助概念

我们将追随 Minkowski, 但是又将大大超过 Minkowski, 用几何学的辅助概念来激活 $x, y, z, t$ 的 “四维世界”.

### a) 代数关系[1]

1. 相应于上一节的 (1) 式, 有一 "超锥体 (Hyperkegel)"

$$f=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-c^2(t-t_0)^2=0 \tag{16}$$

从点 $x_0, y_0, z_0, t_0$ 伸展出来. (在各个不同点上的) 所有这些锥体都是 "平行放置的"; 它们与我们的四维世界的无穷远地区 $R_3$ 相交于同一个基本几何形体 (*fundamentalen Gebilde*). 为了对此作一清楚的描述, 我们临时引入齐次坐标, 即我们令:

$$x=\frac{\xi_1}{\xi_5}, \quad y=\frac{\xi_2}{\xi_5}, \quad z=\frac{\xi_3}{\xi_5}, \quad t=\frac{\xi_4}{\xi_5}\text{[2]}. \tag{17}$$

于是上面提及的几何形体就可通过下述两个方程的联立来表达:

$$\xi_5=0, \quad \xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2-c^2\xi_4^2=0, \tag{18}$$

用 (逆步) 平面坐标 $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ 来表示, 我们只要用一个行列式等于零的方程:

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2-\frac{\nu_4^2}{c^2}=0 \tag{19}$$

就可以了. 在这个方程中出现的正负号的配合是对所有的实数关系都适用的. 相应地我们将把基本几何形体 (18) 称为椭圆体. 超锥体 $f=\text{const}$ 包含了全部这些椭圆体, 也同时由它们来标记.

2. 如果我们降低一维, 并且, 例如只局限于 $z=z_0$, 而且把 $x, y, t$ 解释为一 $R_3$ 的直角坐标, 我们就可以很直观地来解释这些东西. 于是我们就得到了一个真正的旋转锥体:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-c^2(t-t_0)^2=0. \tag{20}$$

它的旋转轴与 $t$ 轴平行, 而且, 如果我们采用厘米和秒作基础单位, 那么我们就可说它*非常扁平*; 这时的光速 $c$ 就有 "非常大的" 值 $3\cdot 10^{10}\text{cm/sec}$. 这对抽象数学来说自然算不了什么, 但在心理上却非同小可. 毕竟因此不会给我们将 $c=\infty$ 的情形, 这时 (20) 式变成计入两次的 $t=t_0$ 的平面, 看成极限情形带来直观上的困难.

3. 通过这样局限到三维后我们认识到, 有一个特许情况与超锥体 (16) 的母线

$$x=x_0+\rho\alpha, \quad y=y_0+\rho\beta, \quad z=z_0+\rho\gamma, \quad t=t_0+\rho\delta \tag{21}$$

[1] 有关多维的表达方式人们可以参照 Segre 在 Enzyklopädie (数学百科全书), 第 3C 卷, 7 上所写的总结性的条目.

[2] 也许这里这样来规定更适合些: $(x-x_0)=\frac{\xi_1}{\xi_5}, \cdots, (t-t_0)=\frac{\xi_4}{\xi_5}$. —— 中译者注

(其中应有 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-c^2\delta^2=0$) 相联系. 这样一条母线对它上面的每一个点也是锥体的母线. 还有, 从一条母线上面的点发出的所有锥体都沿这条母线相切. 这样一来, 我们将母线上的全部点及对应的, 在当前的情况下是确定的, 切平面:

$$\nu_1=\alpha,\quad \nu_2=\beta,\quad \nu_3=\gamma,\quad \nu_4=-c^2\delta \tag{22}$$

集中到一起, 我们就得到了以后要讲的[1]、Lie 称之为带 (Streifen) 的一个最简单的例子 (一般来说, 在带上只有在带曲线上的点才能与相应的切平面互换).

4. 由于在 (16) 式中只有差值 $(x-x_0),\cdots,(t-t_0)$ 的平方出现, 坐标系的 $x,y,z,t$ 轴将会与我们的超锥体的任意四根 "共轭直径" 相平行. 显然这种事情在任意 Lorentz 变换下不变的, 而我们可以选这样个别的 Lorentz 变换, 它能将 (16) 式的任一共轭直径四重组变到与其轴平行.

这样一来把那些从点 $x_0,y_0,z_0,t_0$[2] 发出的实向量:

$$(x-x_0),(y-y_0),(z-z_0),(t-t_0) \tag{23}$$

区分为类空 (*raumartige*) 和类时 (*zeitartige*) 两类, 就很重要. 一个向量, 如果对它有 $f>0$ (因而也就是说当它位于锥体 (16) 之外的 "平直的" 世界部分), 我们就称它为类空的, 如果对它有 $f<0$, 我们就说它是类时的. 在过渡的情形中, 这时它位于锥体的母线之上, $f=0$, 就称之为*退化的* (*singulär*). 如果我们说, 超锥体的四根实的共轭直径总是三根为类空, 一根为类时, 这只不过是二次型的惯性定理的另一种表述而已.

5. 通过我们把 $\sqrt{f}$ 看成是两个世界点之间的距离, 我们就来到了一般仿射度量的领域, 于是, 一类空向量的 "长度" 就是实数, 而一类时向量的 "长度" 则是纯虚数, 而一退化向量的 "长度" 则为零. 基本形体 (18) 式的点与任一空间中的点之间的距离为 $\dfrac{0}{0}$. 从 $x_0,y_0,z_0,t_0$ 发出的两个向量, 如果它们相对于 (16) 式为共轭, 即如果一个在另一个的极平面 (Polarebene) 上, 我们就说它们互相垂直.

### b) 无限小几何的几个最简单的基本式

1. 现在我们要假设 $x,y,z,t$, 和 $x_0,y_0,z_0,t_0$ 两者靠得很近. 于是向量 (23) 就要用另一个式子:

$$dx,dy,dz,dt \tag{24}$$

来代替. 二次型 (16) 就变成弧元的平方

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2. \tag{25}$$

---

[1] 这里指的是计划中的第四章, 这章没有完成. 见编者前言. (H.)

[2] 这里原文为 $x_0',y_0',z_0',t_0'$, 疑有误, 今更正. —— 中译者注

如果它结果为负, 那么我们就像在上一节中所做过的那样, 引进一个

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}, \tag{26}$$

其中 $d\tau$ 现在 (按照 Minkowski) 要叫做固有时间 (*Eigenzeit*) 的微分元. 我们还要规定, $ds$ 以及 $d\tau$, 在它们为实数而又不为零时, 总是取正值. 自然, 我们还要将向量 (24), 按照 $ds^2 > 0, < 0$ 或 $= 0$ 的不同情况, 区分为类空, 类时, 或退化的固有时间元三种. 联系到下面对无限小几何的讨论, 人们习惯把那种满足退化传播方向的 (24) 式:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = 0 \tag{27}$$

的超锥体叫做 *Monge* 锥, 因为 Monge 在他的那本奠基性的著作《Application de l'analyse à la géometrie (分析在几何上的应用)》[1] 中最早对这类非线性的微分方程给出了它们的几何解释, 自然是限于三维的情形. 在下面这个退化的传播方向总是要分开来讨论.

2. 对在 $x, y, z, t$ 的世界中伸展着的任一曲线, 其上的线段, 我们要分清它们是类空的, 还是类时的, 最后还有是不是退化的; 对第一种我就可谈它的长度 $s = \int ds$, 对类时的段就要谈它的固有时 $\tau = \int d\tau$ (其中积分限可在线段上任意取).

3. 曲线在其一点上的 "方向" 相应地可以通过

$$x' = \frac{dx}{ds}, \quad y' = \frac{dy}{ds}, \quad z' = \frac{dz}{ds}, \quad t' = \frac{dt}{ds} \tag{28}$$

来确定, 或者也可以通过

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\tau}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{d\tau}, \quad \dot{z} = \frac{dz}{d\tau}, \quad \dot{t} = \frac{dt}{d\tau} \tag{29}$$

来确定, 这两种情况取哪一种, 取决于下面两个式子哪一个成立:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 1, \quad 或 \quad \dot{t}^2 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2} = 1 \tag{30}$$

而定. 类似地我们还可以用二阶微商

$$x'', y'', z'', t'' \quad 或 \quad \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{t} \tag{31}$$

来确定曲线的 "曲率 (Krümmung)". 在此我们有

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' - c^2 t't'' = 0 \quad 或 \quad \dot{t}\ddot{t} - \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{c^2} = 0. \tag{32}$$

[1] 最初出版于 1808 年. 由 Liouville 主持的第二版 (= 第 5 版), 里面除了有很多另类的有趣的细节外, 特别也把 Gauß 的曲面论放进去了, 是现代微分几何的圣经, 巨大的发展就是以它为基础的, 这些所谓的原理已为各国所采用. 见第一卷, 77 页 (中译本 63 页).

因而曲线的方向向量与其曲率向量总是互相垂直的.

人们把下述平方根

$$\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2-c^2t''^2} \quad 或 \quad \sqrt{\ddot{t}^2-\frac{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}{c^2}} \tag{33}$$

的倒数称之为“曲率半径” $\rho$.

4. 还有很重要的一点, 就是我们要深信, 类空世界直线与类时世界直线同时又是它的测地线 (geodätische Linie), 即它们构成下述变分问题

$$\delta\overline{\underline{\int}} ds=0 \quad 或 \quad \delta\overline{\underline{\int}} d\tau=0 \tag{34}$$

的解. 下面只来对类空曲线作此证明的简单计算. 于是我们将 (34) 式详细地写出:

$$\delta\overline{\underline{\int}}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2}ds=0, \tag{35}$$

式中 $x,y,z,t$ 作为函数在保持积分限固定的情况下可以任意变动. 根据变分法的法则得出

$$\frac{d\left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2}}\right)}{ds}=0^{[1]},\cdots,$$

在其中再将 (30) 式代入, 通过直接积分就可得到

$$x'=\alpha,\quad y'=\beta,\quad z'=\gamma,\quad t'=\delta$$

或者为了与 98 页 (中译本 89 页) 上的 (62) 式一致起见, 写成

$$x=x_0+s\alpha,\quad y=y_0+s\beta,\quad z=z_0+s\gamma,\quad t=t_0+s\delta^{[2]}. \tag{36}$$

对于退化直线这个结论不成立, 因为在进行中间计算时在分母会遇到这时为零的表达式 $\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2}$. 当我们在后面尽管会直接把它称之为退化测地线, 那它的意思也就不过是, 它构成在类空测地线与类时测地线之间的一个过渡.

5. 考虑到后面的讲述, 我们还要在这里对测地等距 (geodätisch äquidistant) 的超曲面族以纯粹评注的形式讲一下. *Gauß* 在我们上面提到过的他那本出版于 1827 年的奠基性的著作中已经研究过这种二维的情形: 它们的正交轨迹为测地线的曲线族, 也必定是测地等距的. Gauß 在这里自然是以一个确定的 $ds^2$ 为基础的. *Beltrami* 于 1869 年把这个理论推广到了 $n$ 维的, 具有任意预先给定的 $ds^2=\sum a_{ik}dx_idx_k$ 的空间; 于是他要处理的族自然就是 $(n-1)$ 维的等距流形. 在我们的 (25) 式所表

[1] 这里原文中根式中的第 4 项为 $-c^2dt^2$, 疑有误. —— 中译者注

[2] 于此现在自然要选 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-c^2\delta^2=1$.

示的 $ds^2$ 中有一个新因素在里面, 这就是它是不定的[1], 因而我们必须预备为将超曲面族区分为类空的和类时的, 并将此二者之间的过渡情形当做退化的来加以特别的考察. 从另一方面来讲我们的情形特别简单, 因为我们的测地线已经是直线了.

这一几何理论的核心意义在于, 曲面族:

$$F(x,y,z,t)=k \tag{37}$$

的测地等距的条件是由下述简单的一阶偏微分方程来给出:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2=K, \tag{38}$$

其中类空情形由 $K$ 为正来标志, 类时情形由 $K$ 为负来标志 (而 $K=0$ 则给出尚未排除的退化情形). 正交轨迹从曲面 $F=k_1$ 上的一点到曲面 $F=k_2$ 上的一点这一段所具有的长度 (当它为类空的时候) 为

$$s=\frac{|k_1-k_2|}{\sqrt{K}}, \tag{39}$$

或者所具有的固有时间 (当它为类时的时候) 为

$$\tau=\frac{|k_1-k_2|}{c\sqrt{K}}. \tag{39$'$}$$

以上结论我们可以在一个相当于初等几何中的同心球的这一简单情形中看得很清楚, 这时的 $F$ 是由下式给出:

$$F=\sqrt{K[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-c^2(t-t_0)^2]}. \tag{40}$$

### c) 微分方程 $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2=0$

显然上述微分方程确定这样一个超曲面

$$F(x,y,z,t)=0, \tag{41}$$

它在它的每一个点上都与从该点发出的 Monge 锥 $dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2=0$ 相切. 为了使我们的表述更接近 Monge 所给出表述, 我们设想从 (41) 式解出 $t$, 并写为:

$$t-\Phi(x,y,z)=0. \tag{42}$$

[1] 即在有些点上可能为正值, 而在另一些点上又可能为负. —— 中译者注

然后我们再令

$$\frac{\partial t}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial t}{\partial z} = r,$$

于是我们的偏微分方程就写成:

$$p^2 + q^2 + r^2 = \frac{1}{c^2}. \tag{43}$$

和 (42) 式一样, $t - \Phi(x, y, z) = \text{const}$ 也是一个解. 从点 $x_0, y_0, z_0, t_0$ 发出的超锥 $f = 0$ 本身就是一个明显的例子; 只不过现在我们必须把它的方程写成;

$$t - \sqrt{\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{c^2}} = t_0. \tag{44}$$

同样, 所有那些与这样一个锥体 (或者与基本椭球体也一样) 相切的超平面, 也即那些具有 (见上面的方程 (19))

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 - \frac{\nu_4^2}{c^2} = 0$$

的超平面

$$\nu_1 x + \nu_2 y + \nu_3 y + \nu_4 t + \nu_5 = 0$$

都满足方程 (43).

我们在下面要用到的一阶偏微分方程理论, 在三个变量的情况下是由 Lagrange 创立的, Cauchy (1819) 把它推广到 $n$ 个变量的情形. 然后由 Monge 最早对三变量的情形导入了它的几何意义 (见 98 页上所引他在 1808 年的著作), Lie 大约在 1870 年以后把它推广到 $n$ 个变量的情形, 从而进一步完善到使他在原则上不仅能谈一个积分流形上的 "点" $x, y, z, t, \cdots$, 而且还能谈它上面的 "基元 (Elementen)" $x, y, z, t, \cdots, p, q, r, \cdots$. 于是对一在积分流形上所作的 "曲线" 来说, 这就是我们在上面所提到过的 "带".

从我们在此所讲到的新扩张的数学领域中, 我们只想 —— 考虑到下面的需要 —— 讲一点, 确切点说, 讲一下偏微分方程 (43). 这就是 (正如 Monge 所说的) 特征理论, 或者用 Lie 的话来说, "特征带 (*charakteristische Streife*)" 理论. 我们将仍留在 4 个变量 $x, y, z, t$ 情形内, 将已给的一阶偏微分方程记为

$$\Omega(x, y, z, t, p, q, r) = 0. \tag{45}$$

于是要处理就是带了, 它们通过下述常微分方程来给定:

$$\begin{aligned} & dx : dy : dz : dt : dp : dq : dr \\ = & \frac{\partial \Omega}{\partial p} : \frac{\partial \Omega}{\partial q} : \frac{\partial \Omega}{\partial r} : \left(p\frac{\partial \Omega}{\partial p} + q\frac{\partial \Omega}{\partial q} + r\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right) : -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} + p\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right) \\ & : -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} + q\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right) : -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial z} + r\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right), \end{aligned} \tag{46}$$

于是“带特征”由此就得到了保证, 显然它就是

$$dt - (pdx + qdy + rdz) = 0.$$

于是就有了下面著名的定理: (45) 式的所有积分流形 (一般来说, 因为我们有四个变量, 所以是三维的形体) 将被 $\infty^2$ 个带所覆盖; 而且, 将与任意给定的超曲面 (它们本身在特殊情况下可能简化成一二维曲面, 或简化成一曲线或甚至一单个的点) 相切的 $\infty^2$ 个特征带组合在一起, 就可以直接得到 (45) 式的所有积分流形. 因而一阶偏微分方程 (45) 的完全解就可从常微分方程 (46) 的解得出.

不可能在这里来建立这个理论的基础, 虽然如此, 但是可以在偏微分方程 (43) 上应用它们. 对于这个方程的特征带我们有

$$dx : dy : dz : dt : dp : dq : dr = p : q : r : p^2 + q^2 + r^2 : 0 : 0 : 0. \tag{47}$$

这里我们还要根据 (43) 式用 $\dfrac{1}{c^2}$ 来代替 $p^2 + q^2 + r^2$. 因而 $p, q, r$ 为常量. 为了与前面所讲过的接轨, 我们令:

$$p = \frac{\alpha}{c^2\delta}, \quad q = \frac{\beta}{c^2\delta}, \quad r = \frac{\gamma}{c^2\delta}, \tag{48}$$

因而由于 (43) 式有: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - c^2\delta^2 = 0$. 于是进一步积分方程 (47) 就得到:

$$x = x_0 + \frac{\alpha(t - t_0)}{\delta}, \quad y = y_0 + \frac{\beta(t - t_0)}{\delta}, \quad z = z_0 + \frac{\gamma(t - t_0)}{\delta}. \tag{49}$$

这正好就是由超锥体 (16) 及其相应的切平面 (22) 的母线所生出的带. 换言之: 特征线就是退化直线 (我们也把它们称之为退化测地线), 而与其点对应的超平面和那些通过这些直线的切平面共同组成基本椭球体.

---

最后我们来把当前的这个理论推广到一般的偏微分方程 (38). 为此, 我们就得进入到 $x, y, z, t, u$ 的五维空间, 并着手研究其方程为

$$u = F(x, y, z, t) \tag{50}$$

的超曲面. 我们把 $F$ 的偏微分系数简记为

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \pi, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \kappa, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \rho, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \sigma,$$

则此微分方程在我们面前就呈现为

$$\pi^2 + \kappa^2 + \rho^2 - \frac{\sigma^2}{c^2} = K. \tag{51}$$

但是要想得到相应的特征带, 就需进行一定的计算, 概括如下:

1. 微分方程为:

$$dx : dy : dz : dt : du : d\pi : d\kappa : d\rho : d\sigma = \pi : \kappa : \rho : -\frac{\sigma}{c^2} : K : 0 : 0 : 0 : 0. \tag{52}$$

2. 其次, 就是我们今后将常数 $\pi, \kappa, \rho, \sigma$ 记为 $\frac{\alpha}{\sqrt{K}}, \frac{\beta}{\sqrt{K}}, \frac{\gamma}{\sqrt{K}}, \frac{c^2\delta}{\sqrt{K}}$, $s$ 为一适当的参数, 于是有:

$$x = x_0 + \alpha s, \quad y = y_0 + \beta s, \quad z = z_0 + \gamma s, \quad t = t_0 + \delta s, \quad u = u_0 + \sqrt{K}s. \tag{53}$$

如果我们把含 $u$ 的方程弃去, 这就是说, 我们把五维空间中的曲线 (53) "投影"到了我们所熟悉的 $x, y, z, t$ 的四维空间. 于是我们得到的正好就是方程 (36) 所表示的 "四维世界" 中的类空或类时测地线[1]. 因而这些测地线就可看成是五维空间中的特征线的投影. 同时 $u - u_0$ 也只不过就是所考察的这一段曲线的长度乘以 $\sqrt{K}$.

自然我们还可以进一步扩大这种关系, 具体做法就是, 我们把 $\pi, \kappa, \rho, \sigma$ 也看成是一个四维空间, 并在其上对方程 (51) 通过相应的特征带进行积分来与 b) 中对沿测地线的积分所作的假设建立完全的联系. 对 $R_5$ 中的流形 $u = F(x, y, z, t)$, 我们总是经常用它们在 $R_4$ 中的 "等值面", $F$ 沿该面为常数, 来直观地加以理解. 如果 $F$ 是方程 (50) 的一个解, 则这些在 $R_4$ 中的等值面就将是测地等距的, 等等. 在 $R_4$ 中来研究 $R_5$ 中的关系, 就构成了画法几何的技艺.

对这些极有趣的方面, 从这里所讲到的还可以向各个方向拓展, 我不可能在此进一步追述了. 我们将在稍后对分析力学的评述时还会遇到它[2].

## §3 借助进一步的几何运算完善我们的物理世界图像

为了完全适应现代物理的观点, 我还要把在上一节中所述向几个方向作一补充.

### a) 物理基本概念更精确的确定

这里要谈的是有关的两点约定, 尽管这两点约定与我们至今所讲的是协调一致的, 但并不是由它们来给定的.

第一点是, 物理学家尽管给我们带来了适应于 Lorentz 群的相对论原理的、我们对空间与时间观念的全部深刻的改变, 但是在单个的空间点处, 过去与未来的区分还必须坚持. 更确切一点说, 只允许有这样的代换 (10), 在其作用下, 在保持 $x, y, z$ 不变的情况下, $t$ 的一个正增量对应的 $t'$ 的增量也是正的, 因而由此系数 $\alpha_{44}$

[1] 只不过是这里总是用 $t$ 代替了 $l$, 从而 $\delta$ 的意义要作相应的改变.

[2] 见 67 页 (中译本 63 页) 上编者附注.

为正! 这个约定与相对论思想的一致性, 这是我们在此所要求的, 就在于, 那些由 (11) 式所表示的, 其 $\alpha_{44}$ 为正的实代换自身就构成一个群[1].

我们还认识到, 事先限制 $\alpha_{44}$ 为正, 这就相当于假设相应的实 Lorentz 代换构成一连续体 (*Kontinuum*).

由于这个限制, 每一由在 105 页 (中译本 96 页) 上的 (16) 式所确定的, 正如 Minkowski 这样表达的, 锥体:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-c^2(t-t_0)^2=0$$

分解为一个前锥 (*Vorkegel*) 和一个后锥 (*Nachkegel*) (其中头一个属于 "前世界 (Vorwelt)" ($t<t_0$), 而后一个则属于 "后世界 (Nachwelt)" ($t>t_0$). 但在每一条类时曲线 (最后也是在每一条退化曲线) 上, 我们可以规定一个正方向, 使得我们能指出曲线上的每一点从前世界到后世界的方向.

现在来讲对讨论到至今的思想的第二个限制: 取普通物理中的质点的概念 (它在时间流逝的过程中, 正如人们所说的, 保持恒同 —— 这里谈的可以是有质质点, 或者也可以是一个电子). 当人们特别说到这样一个质点在空间作任意运动时, 我们现在就说 —— 再次跟随 Minkowski—— 它在 $x,y,z,t$ 的四维区域内画出一条世界线. 我们还要进一步规定, 用通常的说法一个质点的速度决不会 $>c$. 这就是说, 世界线总是类时的, 只有在极限情形下会是退化的[2]. —— 我们必须建立这样的图像, 在四维世界的区域内有多少不同的粒子, 就有多少不同的这种世界线并肩运行 (互相不会相交), 而一切物理现象就是通过这些世界线的相互关系来表达. 我们由此可以坚持普通的因果原理 (*Kausalitätsprinzip*). 即假定只有过去能对未来发生影响, 而不是反过来. 于是一条世界线 I 上的个别地点只能对另一条世界线 II 上的那些在其前锥内或其上的线段有影响. 这样一来我们就很容易证明, 在 II 为类时路线时, II 上只存在一个点, 能使 II 在这里与顶点在 I 上的前锥相交. 如果我们设想 —— 我这里回到传统的说法 —— 在 II 的各个不同的点上发出一个作用, 它们用光速 $c$ 传播, 那么在 II 上只有这个点位能对在 I 上的点有影响. 因此 Minkowski 把 II 上这个点位称为属于 I 的点位的光点 (Lichtpunkt).

[1] 这一点在用双四元数来独立描述时就非常漂亮地出现过, 正如我们在讲 §1 中的公式 (11) 时就提到过. 在那里系数 $\alpha_{44}$ 显然具有值

$$\frac{A_1^2+B_1^2+C_1^2+D_1^2+A_2^2+B_2^2+C_2^2+D_2^2}{A_1^2+B_1^2+C_1^2+D_1^2-A_2^2-B_2^2-C_2^2-D_2^2}, \tag{54}$$

其中的分子 (在 $A_1,\cdots,A_2,\cdots$ 为实数时) 就本身而言为正, 而分母意为双四元数 $Q_1\pm\varepsilon Q_2$ 的模. 现在我们来作代换的结合, 即将相应的双四元数互相相乘. 在两个四元数相乘时它们的模也相乘. 于是由此类推.

[2] 一个质点 $x,y,z$ 的速度 (在普通表示的意义下) 越大, 它的世界线就越平 (flacher). 世界线的每一段都有它的 "固有时间 (Eigenzeit)". 是 Einstein 的大胆的思想指出, 一块与质点一起运动的手表所记录到的时间才是这个固有时间.

由我们的物理观念与此规定相结合而得到的更强的确定性, 我们在此只想用它来完善先前所提出的, 计算一个做匀速运动的电子的四维势这个课题. 该电子应以 $< c$ 的速度运动. 那么根据以上所述对每一世界点 $x, y, z, t$, 它的世界线上正好有一个属于它的光点 $x_0, y_0, z_0, t_0$ (这里 $t_0 < t$). 我们还要进一步按 108 页(中译本 98 页) 上的 (29) 式谈它的方向向量的分量 $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, \dot{t}_0$ (这对做匀速运动的电子来讲, 自然在它的世界线上所有点位它们都有同一数值). 这里 $\dot{t}_0$ 按新近所作的约定应 $> 0$. 相应的四维势, 它在 99 页 (中译本 90 页) 上公式 (65) 已能确定到差一符号未定, 现在可写成

$$q_x = -\frac{e\dot{x}_0}{c^2 P}, \quad q_y = -\frac{e\dot{y}_0}{c^2 P}, \quad q_z = -\frac{e\dot{z}_0}{c^2 P}, \quad q_t = +\frac{e\dot{t}_0}{P}, \tag{55}$$

其中 $P$ 总是指下述正的值:

$$P = \dot{t}_0(t - t_0) - \frac{\dot{x}_0(x - x_0) + \dot{y}_0(y - y_0) + \dot{z}_0(z - z_0)}{c^2}. \tag{55'}$$

实际上 $x, y, z, t$ 总是在 $x_0, y_0, z_0, t_0$ 的后锥上. 我不打算谈验算的细节, 而只是指出, 这个公式本质上与当年 (如 99 页 (中译本 90 页) 上所述) Liénard 以及 Wiechert 对一任意的以小于光速运动的电子所建立的那个非对称的公式是一致的. 人们在此和在电子做匀速运动时的情况下一样, 得到同一公式 (55), 这是一个非常奇妙的事情, 如果我们对将在下一节要处理的偏微分方程理论做尽可能的进一步追究, 我们就会达到这个结果. 人们可以参考, 例如, 我们曾反复提到过的, Sommerfeld 在 1910 年的著作.

### b) 进一步的几何运算

理论数学家先前的思想创造与今天数学物理学家的必备知识之间奇妙的协调一致已经得到过反复强调. 我还不得不对两个特殊的事情深入讨论一下, 它们又再次证实了这一协调一致性. 这仍然是有关几何理解方式方面的, 它们是由 Darboux, Lie, 还有我本人, 其中部分是私人之间的合作, 于 1869 — 1871 年所开创的. 人们可以参阅, 例如, Lie 和我发表在 Math. Ann. (1871) 第 5 卷上的论文, 或者也可以参阅我的石印本的《高等几何讲义》(1893) 第 1 卷[1] 中的综述.

1. 四维世界 $x, y, z, t$ 到三维空间 $x, y, z$ 的球上的映射

我们简单地令从点 $x_0, y_0, z_0, t_0$ 发出的超锥体

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - c^2(t - t_0)^2 = 0 \tag{56}$$

与 $t = 0$ 的三维空间相交. 相交的结果就是一个以 $x_0, y_0, z_0$ 为中心, 以 $\pm ct_0$ 为半径的球. 如果还像在 Lie 的 "球几何 (Kugelgeometrie)" 中从头到尾所做的那样 (或者

[1] 见 29 页 (中译本 27 页) 上的脚注 1.

还有 Laguerre 和其他一些现代几何学家也是这样), 区分球的正半径与负半径 (所谓 "定向了的 (orientierte)" 球), 则这种关系就是唯一的.

在这个对应原理下从经过 $x_0, y_0, z_0, t_0$ 的世界线会得出什么来呢? 是一族球, 以更物理的方式来表述, 是一族球形光波, 它们以一个用任意的小于光速的速度运动的空间点 $x_0, y_0, z_0$ 为中心. 只要 $t_0 < 0$ (在过去), 我们得到的光波就是向此中心汇聚的, 而在 $t_0 > 0$ 时, 得到的光波就是由此处 (总是以光速 $c$) 向外传播的. 在其余的情况下, 对 $t_0 < 0$ 的球以及和对 $t_0 > 0$ 的球一样, 将自相包围 (不会互相交于实点).

有许多人更喜欢用这个图像代替那四维的点流形 $(x_0, y_0, z_0, t_0)$ 来工作. Timerding 在 1912 年的德国数学家协会年刊第 21 期上就提出过这个建议. 但是 Bateman 在我们于 79 页 (中译本 71 页) 上已提到过的那篇 1909 年的论文中就已经用到过了, 并且在那里指出过, 那些把 $dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 = 0$ 变到自身的 $G_{15}$ 的代换, 将 $R_3$ 中那些定向相同, 互相相切的球仍变成这样的球, 反之亦然. 因此他把这种变换称之为 "spherical wave transformations (球面波变换)"[1] .

2. Lorentz 群作为一个更一般的群的特例

根据 Cayley 在 1859 年所提出的普遍基本原理, 如同我们在第一卷的第 4 章中见到过的那些, 可以将 Lorentz 群及其相应的 "仿射 " 度量建立在对 105 页(中译本 96 页) 上的 (19) 式所表达的第二类形体

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 - \frac{\nu_4^2}{c^2} = 0 \tag{57}$$

的射影研究之上. 在那里这些形体 (因为我们采用了 5 个齐次变量) 是用行列式为零来标记的, 对训练有素的几何学家来说, 可以毫无困难地用下述更一般的形体

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 - \frac{\nu_4^2}{c^2} + \frac{\nu_5^2}{R^2} = 0 \tag{58}$$

来代替它, 而 (57) 式则可作为它在 $R = \infty$ 时的极限情形出现. 于是我们在齐次点坐标中还可以用下述单一的二次方程

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - c^2\xi_4^2 + R^2\xi_5^2 = 0 \tag{59}$$

代替 105 页 (中译本 96 页) 上的 (18) 式中的两个方程来作为基础. 如果我们适当地选取距离的单位, 那么在相应的射影度量中就可以选下式

$$R \cdot \arccos\left(\frac{\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 - c^2\xi_4\eta_4 + R^2\xi_5\eta_5}{\sqrt{\xi_1^2 + \cdots + R^2\xi_5^2}\sqrt{\eta_1^2 + \cdots + R^2\eta_5^2}}\right) \tag{60}$$

[1] Batenan 是特别地针对当时出现的文献一般来讲的. 但是他在这里忽略了, 他所说的球变换从实质到形式都是与那 Lie 的球几何一致的.

作为“两点之间的距离”, 它可以转化为

$$R\arcsin\frac{\sqrt{D_{\xi\eta}}}{\sqrt{\xi_1^2+\cdots}\sqrt{\eta_1^2+\cdots}},\tag{61}$$

其中 $D_{\xi\eta}$ 表示下述二重镶边的行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \eta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_2 & \eta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \xi_3 & \eta_3 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 & 0 & \xi_4 & \eta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R^2 & \xi_5 & \eta_5 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 & 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & \eta_5 & 0 & 0 \end{vmatrix}\tag{62}$$

我们在这里引进公式 (61) 和 (62) 是因为他们能最简单地使我们认识到, (60) 式在过渡到 $R=\infty$ 时能提供 Lorentz 群的距离的概念. 的确是这样, 在 $R=\infty$ 时由 (61) 式得

$$\frac{\sqrt{(\xi_1\eta_5-\xi_5\eta_1)^2+(\xi_2\eta_5-\xi_5\eta_2)^2+(\xi_3\eta_5-\xi_5\eta_3)^2-c^2(\xi_4\eta_5-\xi_5\eta_4)^2}}{\xi_5\eta_5},\tag{63}$$

而且它在用非齐次书写方式下不是别的, 只不过是众所周知的表达式

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-c^2(t-t_0)^2}.$$

Einstein 在他最近发表的论文 (1917 年 2 月的柏林科学院会议报告) 中从宇宙学的考察出发, 尽管的确尚未达到尽善尽美的形式, 但从实质上来看已经精确地达到了 (60) 式[1], 要不是这样, 这个附带的解说我讲都不会讲. 他就此决定对 Lorentz 群的“世界观”作这样的改造, 认为这个世界虽然在时间上仍然是无限延伸的, 但在空间上则否. 但这一点 (60) 式的规定恰好能达到 (对几何学家来说我不用解释, 它实际上用我的旧术语来讲就是, 用一个“椭圆性的”度量来代替 Lorentz 情形下的“双曲性的”度量).

## §4 关于偏微分方程 $\dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}+\cdots-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2F}{\partial t^2}=0$ 的求积简史

我们已经通过引入四维势把 Maxwell 方程组的求积归结为解下述方程组:

$$\Box q_i=0.$$

[1] 正如 Klein 本人在这个地方手写的补充, 这个说法不准确. (60) 式对应的是 de Sitter 的设定, 而不是 Einstein 的. 见 F. Klein: 论守恒律的积分形式和空间上封闭的世界理论, Gött. Nachr. 1918, 394 页 = 全集, 第 1 卷, 586 页. (H.)

因而对我们来说就是要处理下述单个的方程

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=0, \tag{64}$$

我们可以把它称之为三维振动方程: 它在那些三维空间 (各向同性的) 介质的振动问题中处处居于核心的地位. 它是在 1795 年就已经由 Euler 在研究声音的传播时建立了[1].

对其发展过程作完整的历史评价自然只有当我们一方面追溯到一维的振动方程

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}-k^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}=0,$$

另一方面又追溯到势的微分方程

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=0,$$

这才有可能. 在这两方面带来了丰富材料的就是数学百科全书第二卷至今已经出了的部分, 特别是出自 Burkhardt 的笔下那部分; 还可以参阅 Burkhardt 发表在德国数学家协会年报第 10 卷, 2, a, b (1908) 上内容广博的报告.

在这里, 这样说吧, 我只能将历史发展 (至今绵延超过了 150 年) 的个人方面标记出来. 而在至今我们所谈的与 Lorentz 群相联系着的理论方面, 则正好相反. 在后者是纯粹的数学思想先行, 而数学物理就有了可能采用现成的思想体系来为它的目的服务, 如果它想经济地从事的话. 在我们的偏微分方程方面事情恰好相反. 在这里数学物理学家自己创立了基本的思想原则, 而随后纯粹数学家才开始建立起这些原则得以成立的严格的条件.

就方程 (64) 的积分理论而言, 我们首先要讲它的基本解, 即这样的解, 它在 $x, y, z$ 空间具有尽可能简单的奇点, 而在无穷远处的行为尽可能地单纯. 对微分方程

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=0$$

来说, 如给奇点 $x_0, y_0, z_0$ 配上质量 $\omega$, 它的基本解已知就是

$$\frac{\omega(x_0, y_0, z_0)}{r},$$

其中 $r=\sqrt{(x-x_0)^2+\cdots+(z-z_0)^2}$; 设想质量还依赖于时间, 则此解将为

$$\frac{\omega(x_0, y_0, z_0; t)}{r}.$$

[1] 全集, 系列 3, 第 1 卷, 480页.

作为 (64) 式的基本解就由下述只稍稍复杂一点的形式

$$\frac{\omega\left(x_0, y_0, z_0, t-\frac{r}{c}\right)}{r} \tag{65}$$

给出, 这个解人们今天称之为扰动 (*verzögerte*) (推迟 (*retardierte*)) 势 (在奇点处呈现出来的质量刚好是存在于 "先前" 时刻 $t-\frac{r}{c}$ 的质量). 这个解在原理上、在即将提到的 Poisson 的著作中就已经有了; 它的现代表述我第一次遇到是在 Poincaré 的《Electricité et Optique (电学与光学)》的第二版, Paris, 1901 上 (但在该书的 455 页上认为它是已知的).

有关 (64) 式的积分理论的其余方面, 我想举出几点主要的进展:

1. 首先是 Poisson 在 1808 年至 1819 年间的研究工作. 他首先得到了一个公式, 用于处理在 $t=0$ 时在空间中任意给定的初扰动在时间中的传播. 它是由 (65) 式分别对在经 $t$ 以后所取的微分系数时的基本解求和所得, 解中所涉及的空间点 $x_0, y_0, z_0$ 满足 $t-\frac{r}{c}=0$[1]. 相应的公式由两个二重积分组成[2].

2. Poisson 公式可以看成是一个特殊 "边值问题" 的解. 因为 $F$ 和 $\frac{\partial F}{\partial t}$ 是给定在 $t=0$ 这个流形上, 它可以理解为 $t>0$ 这 "半个世界 (Halbwelt)" (用 Minkowski 喜欢的说法来讲, 叫做 "正半世界 (positive Halbwelt)") 的边界, 而我们要求的就是在这个半世界中的解. 于是一直等了整整 40 年, 才有 Helmholtz 出来 ("两端开口的管中空气振动的理论", 1859, Crelles Journal, 第 57 卷), 在采用由 Green 特别对势论所开创的方法之下, 着手研究一般的边值问题. 属于同一思想范围内, 只不过是更具明显的四维特征的工作有 Kirchhoff 著名的对 Huyghens 原理的奠基性工作 (柏林科学院会议报告 1882). 它研究的是确定在一柱状世界区块内的 $F$, 这个柱状区块以一任意的空间区块为底, 全部母线平行于 $t$ 轴.

3. 这样一来在上面引用到的 Rayleigh 的《声学理论》就有许多更进一步材料. 除此之外在那里研究了下述三重积分

$$\iiint \frac{\omega\left(x_0, y_0, z_0, t-\frac{r}{c}\right)}{r} dx_0 dy_0 dz_0, \tag{66}$$

这个积分是展布在任一世界点 $x, y, z, t$ 的前锥上的; 可以证明 (66) 式满足下述微分方程:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=-4\pi\omega, \tag{67}$$

[1] 它对 $x, y, z, t$ 来说是 "光点".

[2] 它存在于所有有关数学物理的书中, 例如, Rayleigh 的《Theory of sound (声学理论)》(London 第 1 版, 1877/1878, 第 2 版, 1894).

人们由此可以反向推出基本解 (65) 的意义及其在 Poisson 公式中的出现. (随后有人在电磁现象中作了同样的推进, 其中有 Lorentz, La théorie électromagnetique de Maxwell(Maxwell 的电磁理论), Leyden, 1892.)

4. 由 2. 中所述还可以作进一步的补充, 即由于对声学的应用很快就提出了

$$F = \varphi(x, y, z)e^{ikt}, \tag{68}$$

将它代入 (64) 式就得到只含三个不变量的偏微分方程:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{K^2}{c^2}\varphi = 0. \tag{69}$$

至于与此有关的广泛的文献, 可参阅由我促成出版的 Pockel 的专著《微分方程 $\Delta u + \lambda u = 0$》(1891), 以及 Sommerfeld 发表在数学百科全书第 2 卷, A 7c (1900) 上的有趣的专题评述, 这期间由于现代的发展, 已经过时了.

5. 在由此所引用的文献中, 对边值问题的处理不仅应用了主解 (基本解) (64) 式及其推广, 即在给定区域内的 "*Green 函数*", 而且还扯上了*级数展开的方法*, 把它应用于 (64) 式, 就是对每一个区域, 超越 (68) 式的设定, 寻求一无限系列的特解

$$F_i = \varphi_i(x) \cdot \chi_i(y) \cdot \psi_i(z) \cdot \omega_i(t) \tag{70}$$

以便将所要求的解 $F$ 写成如下的形式:

$$F = \sum c_i F_i. \tag{71}$$

法兰西研究者 Lamé 把他自己毕生事业很大一部分贡献给了由此提出的, 这个在当时处于众所瞩目的突出地位的物理学的偏微分方程问题. 我在后面可以提出许多关于三维势理论级数展开的形式定律都与他有关; 人们可参阅 Bôcher 在 1894 年所写的一本与此有关的书《势论的级数展开》. 所出现的级数收敛的证明仍未给出, 但是这些已由现代的研究所完成. 无疑人们可以用适当的方式先行采用约定 (70) 式和 (71) 式[1].

我们还记得, 我们的微分方程 (64) 不仅对有十个元的 Lorentz 群的代换保持不变, 而且也对那个有十五个元的群的代换保持不变, 因此我们有一系列的方法在手可用来求得 (64) 式的特解以及 Maxwell 方程组的合适的解[2].

[1] 在三维势论的级数展开中从未用过一般的超几何函数, 这种函数是根据 Gauß 和 Riemann 来定义的, 而总是仅仅采用了它们的特殊情形和极限情形 (球函数, Bessel 函数, 等等). 由我在上面所提到的公式可以得出, 它们在对微分方程 (64) 所提出的有相当意义的问题上将会是另一个样子. 实际上, Bateman 在伦敦数学协会会刊系列 2 的第 7 卷中给出了与此相关的公式.

[2] 研究这些方法在对实际情形的应用上能达到多远, 以及物理学家对这种个别的情形开拓到了多远, 转到这里来必定是非常有趣的. 但是我们不可能在此来探讨这些问题了.

## §5 初等光学, 特别是几何光学, 作为 Maxwell 方程组的第一级近似

在本节我将展开讨论, 一般光学, 即 Maxwell 方程组在适当假定下的一般积分及其三维解释, 如何过渡到初等波动光学以及初等几何光学.

正如我们直接指出过, 一般光学与下述微分方程:

$$\Box q_i = 0, \quad \operatorname{div} q = 0 \tag{72}$$

有关. 我们发现如果我们令

$$q_i = c_i e^{\frac{2\pi\varepsilon c}{\lambda}(t-\varphi(x,y,z))} \quad (\varepsilon = \sqrt{-1}) \tag{73}$$

并认为此处的 "波长" $\lambda$ 是个小量, 以致在所有出现的方程中 $1/\lambda$ 低次幂相对于其更高次的幂可以略去不计, 这时就会过渡到普通的波动光学.

这样一来由方程 $\Box q_i = 0$ 得出一个与它一致的方程:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{c^2}. \tag{74}$$

它是 110 页 (中译本 101 页) 上 (43) 式所表示的一阶偏微分方程. 如果 $\varphi$ 是 (74) 的一个解, 则下述三维空间中的曲面族

$$t = \varphi(x,y,z) + \text{const} \tag{75}$$

对不同的 $t$ 值描述了一套波列的光波. 这是 —— 在基本的意义上的 —— 一组具有共同法线系的等距离的曲面族, 族中对应于 $t_1$ 和 $t_2$ 值的曲面沿这种法线测得的距离为 $c|t_1 - t_2|$. 我们把此法线本身称之为属于此波列的光线. 它们是奇异测地线 ("特征线") 的投影, 这些测地线在 $x, y, z, t$ 的空间中覆盖着流形 (75).

这就是几何光学的工具. 为了达到完全的波动光学, 我们从 (72) 式中取出散度条件

$$c_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + c_2\frac{\partial\varphi}{\partial y} + c_3\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{c_4}{c^2} = 0, \tag{76}$$

然后根据 104 页(中译本 95 页) 上的公式 (14) 来计算电向量 $(X, Y, Z)$ 及磁向量 $(L, M, N)$. 我们求得:

$$X = \frac{2\varepsilon\pi}{\lambda} e^{\frac{2\varepsilon\pi c}{\lambda}(t-\varphi)} \cdot \left(c_1 + c_4\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right), \text{ 等等}, \tag{77}$$

$$L = \frac{2\varepsilon\pi}{\lambda} e^{\frac{2\varepsilon\pi c}{\lambda}(t-\varphi)} \cdot \left(c_2\frac{\partial\varphi}{\partial z} - c_3\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right), \text{ 等等}. \tag{78}$$

由此推得下述恒等式:

$$L\frac{\partial\varphi}{\partial x} + M\frac{\partial\varphi}{\partial y} + N\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \tag{79}$$

再借助 (76) 式同样有:

$$X\frac{\partial\varphi}{\partial x}+Y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+Z\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0. \tag{80}$$

因而磁振动和电振动一样, 二者都与波面相切. 此外:

$$XL+YM+ZN=0; \tag{81}$$

两类振动互相垂直.

最后我们还算出:

$$X^2+Y^2+Z^2=L^2+M^2+N^2=-\frac{4\pi^2}{\lambda}\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2-\frac{c_4^2}{c^2}\right)e^{\frac{4\pi\varepsilon c}{\lambda}(t-\varphi)}, \tag{82}$$

由此按照 100 页 (中译本 91 页) 上的 (66) 式得出场的比能量为:

$$\frac{4\pi^2}{\lambda^2c^2}\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2-\frac{c_4^2}{c^2}\right)e^{\frac{4\pi\varepsilon c}{\lambda}(t-\varphi)}. \tag{83}$$

但是 Poynting 向量 (同一页 (66) 式), 由于 (80) 式, (81) 式, 沿光线, 自然是对行波来讲, 具有长度为:

$$\frac{4\pi^2}{\lambda^2c}\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2-\frac{c_4^2}{c^2}\right)e^{\frac{4\pi\varepsilon c}{\lambda}(t-\varphi)}. \tag{84}$$

这一切都够简单的了: 我之所以引入它们, 是因为我要讲从 (72) 式到 (74) 式的详细的过渡, 这是由 Debye 才引起大家的注意.

# C 关于力学与 Lorentz 群的相对论的相适应

在我们对 Lorentz 群本身及其对电动力学的基本意义多少有了一定的认识之后, 我们要来关切, 如何将经典力学, 根据我们在 A 中的考虑, 它是与 Galilei–Newton 群的相对性原理相适应的, 改造成适应 Lorentz 群的相对性原理. 这样做的可能性理论上在于, 正如我们已经提到过的, 在 $c\to\infty$ 时, Lorentz 群过渡为 Galilei–Newton 群.

## §1 从 Lorentz 群向 Galilei–Newton 群的极限过渡

人们通常习惯于联系着特殊 Lorentz 变换来谈向 Galilei–Newton 群的过渡, 这个特殊的 Lorentz 变换我们在前面 ( 72 页(中译本 66 页)) 是这样写的:

$$x'=\frac{x+cqt}{\sqrt{1-q^2}},\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=\frac{\frac{qx}{c}+t}{\sqrt{1-q^2}}.$$

在此我们即令 $cq = v$ 并略去含 $\frac{v}{c}$ 以及 $\frac{v^2}{c^2}$[1] 的项, 则我们得到:

$$x' = x + vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t, \tag{1}$$

这就是一个 Galilei–Newton 群的代换. 在此我们必须紧接着对 Lorentz 群的生成算子的完全系 (ein volles system erzeugender Operationen) 作相应的极限过渡. 我们在此可以全部都双向作这种考察, 办法就是, 不是令 $\varepsilon^2 = -\frac{1}{c^2}$, 而是 $= 0$, 这样来从 Lorentz 群的双四元数独立表述得出 Galilei–Newton 群; 见 87 页 (中译本 79 页) 上所述.

因此, 正如我们已经在前面 (56 页 (中译本 52 页)) 表明了, 四维世界的 $G_{10}$ 是非本原的, 由于在它的作用下, 各流形

$$t = \text{const} \tag{2}$$

至多只能在相互之间互换. 先前通过 $dx^2 + \cdots - c^2dt^2 = 0$ 给出的 “Monge 锥” 在这时变换成属于这种流形的、二次计入的成员 $dt^2 = 0$. 于是 Lorentz 群的 “仿射” 度量会彻底改变其特征. “基本椭球体” 在平面坐标 (Ebenenkoordinaten) 中的方程, 按照 105 页 (中译本 96 页) 具有下述形式:

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 - \frac{\nu_4^2}{c^2} = 0,$$

现在转变为其行列式 (秩为 3) 二重为零的二次方程:

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 0. \tag{3}$$

在点坐标 (Punktkoordinaten) 中要描写这一退化形体需要不少于三个的方程:

$$\xi_4 = 0, \quad \xi_5 = 0, \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0, \tag{4}$$

这无非就是普通三维度量几何中的球面圆当成四维世界中的一个形体来理解. 瞬时所取两个元素之间的 “距离” 的表达式:

$$\sqrt{(t_1 - t_0)^2 - \frac{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}{c^2}}$$

现在就退化为

$$t_1 - t_0, \tag{5}$$

而且, 只有当 $t_1 - t_0$ 为零时, 上述普通意义的距离表达式:

$$\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} \tag{6}$$

[1] 这里原文两项均为 $\frac{v}{c^2}$, 疑有误. —— 中译者注

才会保持住不变的意义.

世界线的观念, 它们在 $x, y, z, t$ 的四维连续体中划过, 从而具有一定的前进方向的意味, 我们自然还能保持住. 世界线元

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}}$$

就简单地为 $dt$, 从而在一个质点的 "固有时 (Eigenzeit)" 和 "直接观察到的时间 (Zeit schlechthin)" 之间就用不着再去做什么区别. 世界线的 "方向向量 (Richtungsvektor)" (108 页 (中译本 98 页)), 即 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{t}$, 现在就要换成

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, 1, \tag{7}$$

(同样) 曲率向量 $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{t}$ 就要换成

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}, 0. \tag{8}$$

我已在这一处理中将平常的表述作了这样的改变, 使得我把相应于 Lorentz 群的对称性的概念形成放在首位. 在我看来它比相反的方法更方便, 这种与我们相反的方法从传统的概念出发, 然后再一个一个地来寻求其正确的 Lorentz 公式[1] .

---

[1] 也许我还可以在曲率半径这个标量概念上对此作更确切一些的解释: 我在 108 页 (中译本 99 页) 上已经给出了曲率半径的一个公式:

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\ddot{t}^2 - \frac{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}{c^2}} \tag{9}$$

(这个 $\rho$ 的量纲是个 "时间", 并且对一条类时世界线它将取实值). 但是取微分的参数, 取的是属于这条世界线的 "固有时". 我们引进另一个参数来代替它, 并将 $x, y, z, t$ 对此新的参数的微分系数暂时用一撇表示, 这样就要用下述更一般的公式来代替:

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{(x'x'' + y'y'' + z'z'' - c^2t't'') - (x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2 - c^2t''^2)}{(x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2)^3}} \tag{10}$$

(在参数为固有时的时候它就回到 (9) 式). 现在我们要这样来选特别的坐标系 $x, y, z, t$, 即取世界线在此直接观察处的切线作为 $t$ 轴, 因而为此要假设 $x', y', z'$ 为零 (因而用我们在 96 页 (中译本 87 页) 上引用的 Minkowski 的说法, 也就是 "变换到静止"). 这个坐标系还可以围绕 $t$ 轴这样转动, 使得 $x'', y''$ 也为零. 最后作为世界线的参数选如此引进的坐标系本身的 $t$. 于是有:

$$t' = 1, \quad t'' = 0, \quad z'' = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

而由 (10) 式就成为

$$\frac{1}{\rho} = \frac{i}{c}\frac{d^2z}{dt^2}, \tag{11}$$

此处 $\frac{d^2z}{dt^2}$ 是我们直接观察的质点的、Minkowski 所谓的*静止加速度* (*Ruhebeschleunigung*). 于是这个表达式就被许多作者所采用. 在我看来, 一开始就提出公式 (9) 及 (10) 更令人信服得多.

## §2 单个质点的动力学

我们这样来阐述单个质点的动力学, 完全和我们已经在 96 页 (中译本 88 页) 上在讨论电磁场对一个电子的作用时所做的那样, 办法就是, 赋予点一个标量 $m$ 作为其质量, 设有一 "四维力"

$$P_x, P_y, P_z, P_t$$

作用于其上, 这个力是一个同步向量[1], 并令

$$m\ddot{x} = P_x, \quad m\ddot{y} = P_y, \quad m\ddot{z} = P_z, \quad m\ddot{t} = P_t. \tag{12}$$

因为有下述方程成立:

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} - c^2\dot{t}\ddot{t} = 0$$

我们必须设想力分量恒受着相应的条件

$$\dot{x}P_x + \dot{y}P_y + \dot{z}P_z - c^2\dot{t}P_t = 0 \tag{13}$$

的约束: 因而四维力总是 (在我们的度量的意义下) 垂直于质点的方向向量.

我们要设法让方程 (13) 恒等地成立, 办法就是, 我们在接受对电子有效的那些公式下 (97 页 (中译本 88 页)), 只是现在引进六个纯粹形式的量, $X, Y, Z, L, M, N$, 它们还只依赖于质点的 $x, y, z, t$, 于是有:

$$\begin{cases} P_x = \dfrac{M\dot{z} - N\dot{y}}{c} + X\dot{t}, \\ P_y = \dfrac{N\dot{x} - L\dot{z}}{c} + Y\dot{t}, \\ P_z = \dfrac{L\dot{y} - M\dot{x}}{c} + Z\dot{t}, \\ P_t = \dfrac{X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}}{c^2}. \end{cases} \tag{14}$$

特别地, 如果我们引进一个四维势, 那么这六个量, 也像那里那样, 就可以表述为一四维势的大旋度. 在以 $x, y, z, t$ 为基础之上, 表达这六个量的公式, 如同已经在 104 页 (中译本 95 页) 给出的, 是这样:

$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial q_x}{\partial t} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial q_t}{\partial x}, \quad Y = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial q_y}{\partial t} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial q_t}{\partial y}, \quad Z = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial q_z}{\partial t} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial q_t}{\partial z}, \\ L = \dfrac{\partial q_z}{\partial y} - \dfrac{\partial q_y}{\partial z}, \qquad M = \dfrac{\partial q_x}{\partial z} - \dfrac{\partial q_z}{\partial x}, \qquad N = \dfrac{\partial q_y}{\partial x} - \dfrac{\partial q_x}{\partial y}. \end{cases} \tag{15}$$

[1] 关于这个术语, 请见 167 页 (中译本 151 页) 上的附注 1. (H.)

但是从一开始就要求 $q_x, q_y, q_z, q_t$, 也像在 Maxwell 方程组的情形那样, 还要接受条件 $\Box q_i = 0$, $\mathrm{Div} q = 0$, 看来就没有必要了. 此外, 我们还可以将方程 (14), (15), 和在 97 页 (中译本 88 页) 上一样, 综合成一个 "Hamilton 原理"

$$\delta \overline{\underline{\int}} \left( \frac{cm}{2}(c^2\dot{t}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2) + (\dot{t}P_t + \dot{x}P_x + \dot{y}P_y + \dot{z}P_z) \right) d\tau = 0, \tag{16}$$

也要加上那时所说的限制.

无论如何在这些公式中最重要的就是那并列的四个坐标的运动方程 (12). 我们将

$$m\dot{x}, m\dot{y}, m\dot{z}, m\dot{t} \tag{17}$$

称之为四个*动量分量*, 于是我们就可以从 (12) 式读出四个冲量定理:

$$d(m\dot{x}) = P_x d\tau, \quad d(m\dot{y}) = P_y d\tau, \quad d(m\dot{z}) = P_z d\tau, \quad d(m\dot{t}) = P_t d\tau, \tag{18}$$

从中我们看到了在力学中有效的惯性原理的准确的表达. 其中头三个自然对应于普通力学的三个冲量定理; 现在最值得高度关注的是, 这第四个定理在极限过渡到普通力学时就直接给出活力[1] 定理; 从而这最后一个定理与我们已经在前面 57 页 (中译本 53 页) 上处理过的通常冲量定理本质上是相同的, 都是由同一个自然根源得出的. 计算过程非常简单. 我们将此新的 (第四个) 冲量定理写成

$$d\left( m\sqrt{1 + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}} \right) = \frac{P_x dx + P_y dy + P_z dz}{c^2} \sqrt{1 - \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{c^2}} \tag{19}$$

(其中, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ 和往常一样, 表示 $\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}$, 相反, $x', y', z'$ 则表示 $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$; 这二者之间的转化只要利用关系 $d\tau^2 = dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}$ 就可以了). 现在我们让平方根作级数展开, 则有:

$$d\left( \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} + \cdots \right) = (P_x dx + P_y dy + P_z dz)(1 + \cdots). \tag{20}$$

现在这里所有用 $\cdots$ 表示的项在 $c = \infty$ 的极限过程中都可以略去, 而 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ 就过渡到 $x', y', z'$, 这样一来实际上就得出了通常的活力定理:

$$d\left( \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} \right) = P_x dx + P_y dy + P_z dz. \tag{21}$$

这三个冲量定理同时与能量定理合并在一起, 我们在 101 页 (中译本 93 页) 上已经在 Maxwell 方程组的领域内碰到过.

---

[1] 活力 (lebendige Kraft), 现在通称为能量, 所以这里指的就是能量定理. —— 中译者注

但是对于力学的历史的理解来说有一个值得注意的结局. 二百年来, 在笛卡儿学派与莱布尼茨学派之间为究竟是 "运动的量", 还是 "活力" 是更重要的基本概念这个问题, 爆发了激烈的争论, 因而用现代的方式来说, 就是在冲量定理与能量定理这二者之间究竟是谁更有优先地位. 现在我们知道, 这根本不是一个要争论的问题, 其实争论的双方是一回事, 只不过是从不同的观点来看而已.

## §3 谈刚体的理论

刚体的概念在经典力学中所起的重大作用, 是不必再多加强调的. 因此想把这个概念以某种方式推广到 Lorentz 力学, 是可以理解的. 在许多物理学家看来, 不可能有这种恰当的类比物, 这当然几乎是显然的, 因为人们还是认为刚性的概念是与力在物体内部传递的瞬时性相联系的, 而这看来与 Lorentz 群的相对性原理无法相协调. 但是这个概念的转移的困难并非首先就在于力的引进上, 而是在运动学的关系上就已经有了. 在我看来, 厘清这一点, 并继而探讨达到建立一个类比物做细致研究是有用的.

经典力学的刚体是一开始就同时存在的一群点, 它们可以经过任意一个 Galilei–Newton 变换而保持它们之间的距离不变. 这种变换的数量, 如我们所知, 为 $\infty^{10}$, 但是由于对其点假设了在开始位置的同时性, 在四维世界 $x, y, z, t$ 中作为基础的刚体还只有 $\infty^7$ 个位置可取. 实际上对那些原先就在同一时刻 $t$ 的点在相关代换 (54 页 II 式 (中译本 50 页)) 中呈现的三组量:

$$\varepsilon_1 t + \xi_1, \quad \varepsilon_2 t + \xi_2 \quad \varepsilon_3 t + \xi_3,$$

它们自来就具有相同的 $t$, 会聚集成相同的三个单项. 由此得出, 流形:

$$t = t_0 \tag{22}$$

在下述三重无限的 Galilei–Newton 变换

$$\begin{aligned} x' &= x + \varepsilon_1(t - t_0), \\ y' &= y + \varepsilon_2(t - t_0), \\ z' &= z + \varepsilon_3(t - t_0), \\ t' &= t \end{aligned} \tag{23}$$

下, 是逐点保持不变的. —— 在不再考虑时间 $t$ 时, 我们这里所提到事实在传统力学中通常就说成是, 刚体具有 6 个自由度.

现在从概念上来讲, 这一点很清楚: 在 Lorentz 群这里不存在与此直接相似的东西. 因为一个保持流形 (22) 逐点不变的代换必定有下述形式

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t;$$

(22) 式在任意的 Lorentz 变换下还能过渡到 $\infty^4$ 个位置

$$\alpha_4 x + \beta_4 y + \gamma_4 z + \varepsilon_4 t + \varsigma_4 = 0 \tag{24}$$

上. 如果我们把刚体定义成位于 (22) 式或 (24) 式中的质点系, 在其上作用上全部 Lorentz 代换, 那么它就必然会在 $x, y, z, t$ 的世界取 $\infty^{10}$ 个不同的位置. —— 因而事情根本不同, 只是还留下一个问题, 就是我们是否能够对作用于单个刚体的 Lorentz 代换再加上一些限制条件, 使得能在这个较狭意义的运动学上保持住一定的类似性.

在这个 "狭义运动学" 中, 人们考察的是一些由 $\infty^1$ 个位置的族, 这 $\infty^1$ 个的位置是一个刚体可以依次取得的位置. 为了得到一个直观图像, 我们来考察一条世界线, 这条世界线是由刚体中单个的点在这种 "运动" 中所描绘出来的.

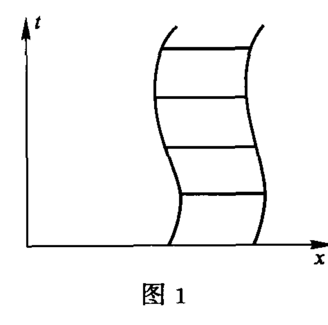


图 1

图 1 所示是在下述简化假设下的情况: 即设所有这种世界线都在 $x, t$ 平面内, 其中画了两条这样的世界线. 于是立即就可看出来 —— 我们现在是在 Galilei–Newton 群中 —— 由于物体的刚性, 在水平方向测得它们之间的距离是相等的, 而这个等距性是它们唯一必须满足的条件. 现在这一点可以用一种相当巧妙的方式表示出来, 使得有可能加以推广. 在 Lorentz 群的世界 $x, y, z, t$ 中, 任意两个方向, 如果满足下述条件:

$$dtd't - \frac{dxd'x + dyd'y + dzd'z}{c^2} = 0, \tag{25}$$

我们就说它们互相垂直. 在 $c = \infty$ 时上式就过渡为平常的方程:

$$dtd't = 0 \tag{26}$$

(这在几何上也是很清楚的, 只要我们从 Lorentz 世界的 Monge 锥过渡到 Galilei–Newton 世界中的双重计入的平面 $t = t_0$ 上去即可). 因而在后一种情况下可以说这两个方向互相垂直, 如果其中一个有 $t = \text{const}$ (即其中一个在图中沿水平方向). 在这种表达方式的意义下我们可以说, 在 Galilei–Newton 情形中, 一刚体上任意两点的世界线是正交等距的[1].

[1] 在 Galilei–Newton 情形中, 刚体的世界线与流形 $t = \text{const}$ 之间形成的夹角必须直接设定为 $= \frac{\pi}{2}$, 否则就可以取任意值. 因为对 Lorentz 群来讲两个传播方向夹角的表达式为:

$$\arccos \frac{c^2 dtd't - dxd'x - dyd'y - dzd'z}{\sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}\sqrt{c^2d't^2 - d'x^2 - d'y^2 - d'z^2}},$$

它对 $c = \infty$ 及 $dtd't = 0$ 来说是不定的.

这一表述自然是有高度的任意性, 但是为了在 Lorentz 群的情形下来定义可动的刚体却与它有关.

这首先是由 Born 在 1909 年提出来的 (Ann. d. Phys. [4] 30), 随后由 Ehrenfest (Physikalische Leitschr. X, 1909) 以及 Herglotz 与 Fritz Noether (Ann. d. Phys. [4] 31, 1910) 从 Born 的这个原则出发推出了更详细的结果. 如果刚体中点的世界线在 Lorentz 情形下也是 "法向等距的 (normal äquidistant)" 那么, 正如 Herglotz 特别指出的, 对于刚体的运动来说还可能有两种情况:

(a) 刚体在四维世界中一系列无限多的位置变更由同一个无限小的 Lorentz 变换重复作用而生成.

(b) 刚体中不同点的世界线在每一瞬时都是垂直地从承载着它的线性流形走出来.

谈到 (a) 我们可以举螺旋运动为例:

$$\left|\begin{aligned} &x' = \cos\omega\cdot x - \sin\omega\cdot y,\\ &y' = \sin\omega\cdot x + \cos\omega\cdot y,\\ &z' = z,\\ &t' = t.\end{aligned}\right.\qquad (\omega\ \text{为一参数}) \tag{27}$$

于是从三维来理解, 这是刚体绕 $z$ 轴作匀速 "转动" (通过坐标变换自然可以用任意一根直线来代替这个转轴). 与此相反, 我们的刚体却做不了加速转动, 因而就做不了从静止开始的转动, 因为它们的点的世界线会是螺距不断增大的螺旋线, 就不可能是法向等距的 (我们可以通过验算证实这一点).

情形 (b) 更有趣, 我们把它称之为法向运动. 在处理它时我们仍将采用 "正交坐标"

$$x, y, z, l = ict,$$

并且在书写表达式和作图时把它们看成好像是实的一样, 尽管这样做会使一些细节变得模糊.

图 2 仍可解释为那种其中 $y$ 和 $z$ 为常数的情形. 因而作图平面为 $x, l$ 平面. 于是刚体中单个点的世界线以某个直线族的正交轨迹出现, 即它们是属于某一预先给定的渐屈线的渐伸线.

不论 (a) 和 (b) 涉及的流形如何, 运动 (a) 只有 $\infty^{10}$ 种 —— 因为要通过 Lorentz 群的基础无限小变换来确定整个运动过程; —— 但是在法向运动的情况时, 当刚体中任意一个点的世界线任意给定后, 运动就确定了.

为了看出这一点, 我们再次来考察一个图, 不过这回是在 $x, y, l$ 空间 (图 3). 我们首先是有世界线 $P, P', P''$[1], 然后是承载着刚体的点的、作为其法平面的线性流

[1] 指经过这三点的世界线. — 中译者注

形 (24). 这样一来, 所有其余的世界线 (因而也就是整个刚体的运动) 就是作为这样给出的线性流形的法向轨迹来得到.

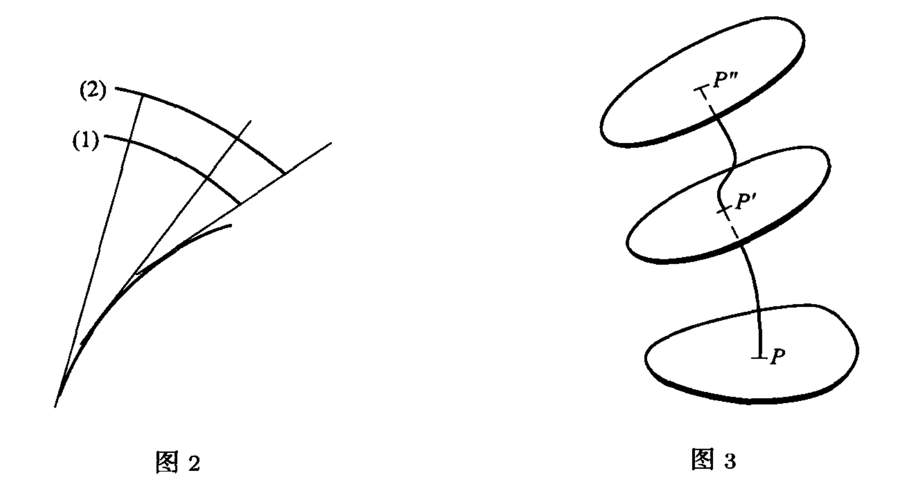



图 2　　　　图 3

这里 "法向运动" 是以其一般特征来确定的; 我们还要考察它的无穷小变换以及由这些无穷小变换所生出的有限变换.

我们可以取刚体的瞬时位置在 $l=0$ 之内. 这样每一个点就将垂直地从 $l=0$ 中跑出来, 因而也就是对它们来说有 $\delta x=0, \delta y=0, \delta z=0$. 于是无穷小变换如下 (如果我们还同时设法使它为一正交变换):

$$\begin{aligned}
x' &= x+0+0+\delta\varepsilon_1\cdot l+0,\\
y' &= 0+y+0+\delta\varepsilon_2\cdot l+0,\\
z' &= 0+0+z+\delta\varepsilon_3\cdot l+0,\\
l' &= -\delta\varepsilon_1\cdot x-\delta\varepsilon_2\cdot y-\delta\varepsilon_3\cdot z+l+\delta\varsigma_4.
\end{aligned} \tag{28}$$

由于这里有四个无穷小增量 $(\delta\varepsilon_1, \delta\varepsilon_2, \delta\varepsilon_3, \delta\varsigma_4)$ 可供支配, 我们可以说: 在情形 (b) 中刚体在无穷小位移下有三个自由度.

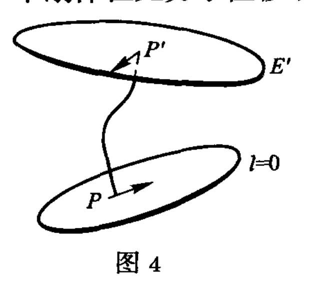



图 4

现在很容易产生错误的判断以为刚体在有限位移中只能取 $\infty^4$ 个位置. 但并非如此. 更确切地说, 它能达到所有由 Lorentz 变换所生成的位置. 由于我在文献中没有见到有专门谈这一点的, 所以我来对此作稍微更深入一点的讨论, 为此我们来借助图 4.

我首先要说: 我能够 (通过一法向运动) 将 $l=0$ 的任一点 $P$ 送到任一点 $P'$, 并同时将通过 $P$ 的 "平面" $l=0$ 送到通过 $P'$ 的平面 $E'$. 为了达到这个目的我只要通过 $P$ 作一条任意的、与 $l=0$ 垂直的曲线 —— 它在 $P'$ 垂直进入 $E'$ —— 并将此曲线取为 $P$ 的世界线. 但是还

可以做得更多! 依靠着在曲线 $PP'$ 选择上的巨大的随意性我还可以将在 $l=0$ 中过 $P$ 点的水平经线送到在平面 $E'$ 中任一过 $P'$ 点的水平经线 (这在图中用在 $P$ 及 $P'$ 上添加一个小箭头来表示).

为了证明这一点, 我们只要能确认下一点就足够了: 即在固定 $P$ 的情况下通过一系列的法向运动, 最后运动到自身但转过了一个任意的角度.

为了看出这一点, 请考察图 5. 它的意思是: 首先以开始的水平经线 $PA$ 为轴, 令平面 $l=0$ 绕它转动到与它原来的位置相垂直, 再从此处通过绕法线 $PA'$ 的转动把它从原来的位置带到沿新的水平经线 $PA''$ 的方向并且再一次地通过转过 90°, 这回可是绕轴 $PA''$, 把它这样地带回原始的位置 $l=0$, 使得它与之完全重合.

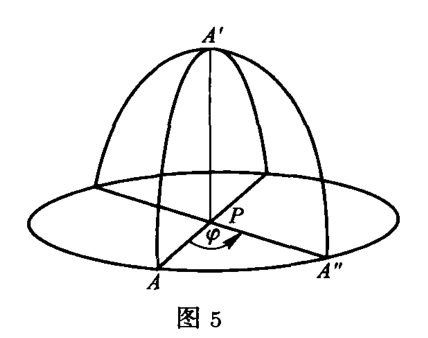


图 5

对于有限运动的自由度与无限小运动的自由度如此地不相同, 不应感到意外. Hertz 在他遗作力学一书中 (68 页 (中译本 63 页) 所引) 对在一固定地基上滚动的球体的相应问题作了详尽的研究. 它作无限小运动时只有 3 个自由度, 作有限运动时则却有 5 个自由度. Hertz 把这种行为用这样的术语来表示, 即把限制球的无限小运动的条件说成是非 “完整约束 (*holonom*)”. 最后, 这个事情是那些研究 Pfaff 问题理论的数学家所熟悉的. 我以下述条件为基础 (为了仍然讨论最简单的 3 个变量的情况):

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0,$$

所以由于这个条件点 $x, y, z$ 只能被束缚在某个平面 $F = \text{const}$ 上运动, 如果将上式的左侧乘以某一 $M$ 使之成为一个全微分 $df$ 的形式, 则要求满足条件

$$X\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + Z\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = 0;$$

否则这个点就可以运动到空间的任一点上去了.

概括地讲, 与 Lorentz 群的假设能相协调的、刚体运动的第二种可能性, 即 “法向运动”, 与有 Galilei–Newton 群在场的情况下刚体的运动没有什么相似的地方. 为了至少保证在无限小运动的一致性, Born 于 1910 年在 Göttinger Nachrichten 上提出了另一个建议, 它可以这样来表述:

(24) “每一个刚体都具有一个中心点 $P_0$, 它的世界线恒与包含这个刚体的线性流形垂直. 但是这个刚体可以在这个流形的内部绕此点作任意的转动.”

如果我们仍从 $l=0$ 这个流形开始, 那么这个定义就许可一个具有 7 个无限小

增量的无限小变换:

$$
\begin{aligned}
x' &= x + \delta\chi \cdot y - \delta\psi \cdot z + \delta\varepsilon_1 \cdot t + 0, \\
y' &= -\delta\chi \cdot x + y + \delta\varphi \cdot z + \delta\varepsilon_2 \cdot t + 0, \\
z' &= \delta\psi \cdot x - \delta\varphi \cdot y + z + \delta\varepsilon_3 \cdot t + 0, \\
t' &= -\delta\varepsilon_1 \cdot x - \delta\varepsilon_2 \cdot y - \delta\varepsilon_3 \cdot z + t + \delta\xi_4.
\end{aligned} \tag{29}
$$

因此悖论决非由世界产生的; 因为物体在有限的运动中肯定保留了它们原来就已经具有的可以取到 $\infty^{10}$ 个位置的能力.

我还不知道有谁进一步研究了这个方法. 一般的理解大多是这样, 人们在 Lorentz 力学中毫不犹豫地把刚体的概念搁在一边, 而 Hertz 还把这个概念作为他的力学的基础. 人们看到我们的物理直观经受了何等的转变.

# 结 束 语

上一节表明, Lorentz 力学, 比起经典理论来, 还有更多的东西要去理解. 在这里, 但也仅仅是在这里, 处处都会出现原则性的区别, 在这些地方对后者对观念作非权宜之变是必要的. 因此可以要求连续介质力学直接适应 Lorentz 群. 但是在此我只得限于重新指出 Herglotz 论弹性理论的重要著作 (Ann. d. Phys. [4], 36, 1911). 就这一叙述的目标而言, 我们只能局限于讲一点力学的初等的起步知识 (有如我们已经对电动力学已经做过的那样). 我们的目标不可能是替代数学物理的教科书. 我们宁愿只是这样来处理, 使得物理学家能感受到, 原来他们在完成他们的现代思想时所用到的数学工具早已在 19 世纪的数学中建设得很完备了.

# 第二章注释

1. 59 页: 这里有一个在 Ricci 演算 (Riccikalkül) 普遍用到的方法, 叫做 “横移 (Überschiebung)” 或 “收缩 (Verjüngung)” (见 205 页 (中译本 185 页) 上所引 Eddington 的书).

2. 62 页: 电子理论的方程可能不是最终正确的这一点, 首先从电子存在的本身不能用旧的场方程来解释就已经看出来了. 目前人们正在探寻如何来改变场方程, 使得电子能作为它的一个特殊的解而得出[1] (Mie, Einstein, Hilbert, Weyl,

[1] W. Pauli jr. 在他的刊于 Enc. d, Math. Wiss, (数学科学百科全书) 第 V 卷 (19), 749 页及以后. 上的论相对论的条目中对此给出了一个综述性报告. 此外还有 F. Jüttner: Math. Ann. 第 87 卷. 1922; A. Einstein: Berl. Ber. 1922 — 1924; S. A. Eddington: Relativitätstheorie (相对论), Berlin 1925.

Eddington). 可是在这条路上人们并没有得到什么令人满意的结果. 不过这期间经典电子理论也还是从另一方面受到了撼动, 即受到了量子现象的发现 (Planck, Einstein) 以及随后对原子结构的研究[1] (特别是通过 Bohr 的研究) 的撼动. 出发点就是把一切都更多地放在经典力学方面, 而不是放在电动力学方面, 但是对经典力学还要补充若干限制条件 (量子条件). 最近终于开始发展出了以建立对所有辐射过程及原子过程的统一描述为目标的量子理论[2] (Heisenberg, Born, Jordan, Schrödinger, Pauli, Dirac). 由于这一发展尚在进行之中, 而且电动力学目前还没有完全纳入到体系之中, 当前还不能对此作总结性的评论.

3. 75 页: "商法则" 的推理方法 (Schlußverfahren). 见 Eddington (205 页上所引 (中译本 185 页)) 的 70 – 73 页.

4. 75 页: 加 $\frac{1}{2}\delta_{ik}\Omega$ 是被许可的, 因为 $\frac{1}{2}\delta_{ik}\Omega$ 是与前面所给的量同步的张量. 见第一章注释 4.

5. 82 页: 如果在某处 $\sum_k \frac{\partial \mu_{ik}}{\partial x_k} = 0 \ (i = 1, \cdots, 4)$ 不成立, 则我们可以类似于在变分法中众所周知的推导时所做的那样, 这样来改变积分区域, 使得积分不为零.

[1] 总结性的阐述: A. Sommerfeld: Atombau und Spektrallinien (原子结构与光谱), 第 4 版, Braunschweig 1924; M. Born: Atommechanik, Berlin 1925.

[2] 奠基性工作有: W. Heisenberg: Zeitschr, f. Phys. (物理学杂志) 第 33 卷, 879 页, 1925; M. Born und P. Jordan: Zeitschr. f, Phys. 第 34 卷, 858 页, 1925; Heisenberg, Born und Jordan: Zeitschr. f. Phys. 第 35 卷, 557 页, 1926; M. Born: Zeitschr. f. Phys. 第 40 卷, 167 页, 1926; Jordan: Zeitschr. f. Phys. 第 40 卷, 809 页, 1927; E. Schrödinger: 发表在 Ann, d, Phys. 上的几篇文章, 还有以书的形式发表的: 波动力学文集. 此外, 还有 P. A. M. Dirac 发表在 Proc. of the roy. soc. of London 上的多篇文章.

# 第三章[1]

# 以二次微分形式为基础的解析点变换群

## A 经典力学的一般 Lagrange 方程

### 引言

到现在为止我们只讨论了任意 $n$ 个变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的线性代换. 现在我们进一步要注视的就是任意代换:

$$x_1 = \varphi_1(y_1, \cdots, y_n), \cdots, x_n = \varphi_n(y_1, \cdots, y_n), \tag{1}$$

其中我们多半是把 $x_1, \cdots, x_n$ 理解为在一个 $n$ 维空间中的点, 这时我们就简单地把 (1) 式说成是点变换. 这时我们对这个变换的理解还有选择的自由, 或者是, 把坐标系看成是固定不变的, 而把空间及置于其中的形体看成是可变的, 或者是, 首先是更方便地把 $R_n$ 看成是固定的, 而把坐标系看成是可变的 (从而 (1) 式可以设想为 "坐标变换").

我们暂时把 $x_1, \cdots, x_n$ 及 $y_1, \cdots, y_n$ 设想为实变量, 并且为了简单起见, 只限于考察空间中的这样一块区域, 使得假设为解析的函数 $\varphi$ 在其中处处为正则, 并且其函数行列式不为零[2] . 于是在我们所感兴趣的区域内代换 (1) 有唯一确定的逆代换, 因而这里群的概念这样来理解, 即在群中除了代换 (1), 还总有它的逆变换存在. 但是我们在前面考察的线性代换群只含有有限个参数, 而现在的情况, 一般来讲, 则有无限多个. 除了前面提到的那个限制外, 大多数的情况下我们不再加任何其他的限制; 于是我们可以谈所有点变换的群, 并经常将它简记为 $G_\infty$.

[1] 请参见章末的注释 1. (H.)

[2] 这个限制今后如无相反要求的提出, 则总是默认为如此.

不过它与 $n$ 个变量的线性代换群有这样的联系, 就是根据 (1) 式微分 $dx_i$ 按下述齐次线性代换变换:

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1}dy_1 + \cdots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_n}dy_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dx_n &= \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_1}dy_1 + \cdots + \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_n}dy_n, \end{aligned} \tag{2}$$

同样还有微分符号 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, 它们也简单地以逆步于 (2) 式的方式变换:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_1} &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_1}\frac{\partial}{\partial x_n}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial}{\partial y_n} &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_n}\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_n}\frac{\partial}{\partial x_n}. \end{aligned} \tag{3}$$

由此我们就给出了所有以下研究的真正的起点. 我们处处都要与线性代换的不变量理论相联系, 但从一开始就只考虑那些线性代换 (2) 或 (3) —— 其 $x$ 对 $y$ 的函数行列式一般不会像至今我们通常对代换行列式所假设的那样, 等于 1.

作为我们的不变量理论研究的合适对象, 除了任意的 (在我们的研究区域内为解析和唯一确定的) 函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 外, 看来首先还有相应的微分形式

$$F(x_1, \cdots, x_n; dx_1, \cdots, dx_n), \tag{4a}$$

或者还有

$$F\left(x_1, \cdots, x_n; \frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right), \tag{4b}$$

它们分别对微分和微分符号为齐次 (在最简单的情况时为齐次, 有理和整幂的函数) —— 这样一来与此同时还有更一般的形式, 它们可含多行微分 $dx_i, d'x_i, \cdots$, 每一行都是齐次的, 以及或含多行微分符号 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}, \dfrac{\partial}{\partial x_i'}, \cdots$, 每一行也是齐次的, 甚或以适当的齐次性同时包含这两种符号.

以我们的 $G_\infty$ 为基础来系统地建立这种形式的不变量理论自然绝非我们的意图. 我们宁可局限于那种比较简单的、对数学物理有特殊意义的基本的原理. 在我们对其成长过程, 我们是如何理解它的, 以及对它的影响所及以粗线条的笔触作尽可能的深入讲述之时, 我们也希望这些讲述能对更广范围的读者也有点用处. 我们首先只来研究单个的二次微分形式:

$$\sum a_{ik}dx_i dx_k \tag{5}$$

(“在我们的区域内” $a_{ik}$ 是 $x_1, \cdots, x_n$ 的单值, 正则变化的解析函数; 同时这个 $a_{ik}$ 的行列式不为零). 在如此限制的前提下显然我们就会和在上一章所研究的连在一

起, 在那里下述特殊的二次型

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 \tag{6}$$

具有基本的意义. 实际上我们的主要目的之一就是阐述, 现代物理在最近几年如何从与 (6) 式相联系的、与 Lorentz 群相关的低级的 (“狭义的”) 相对论发展到了一个高级的 (“广义的”) 相对论, 后者是以一个四个变量的一般二次型为基础, 并且取全体点变换的群 $G_\infty$ 来替代 Lorentz 群[1]. 情况又再次是这样, 即这里所需的数学工具在主要的方面早就建好了摆在那儿, 只不过是通过新的物理观念的构建得到了充分的利用. 为了阐明这一点, 我们要回到一百多年以前, 一直追溯到 Lagrange 在他的基本著作 (Mécanique analytique (分析力学) 第 1 版, 1788) 讲分析力学那部分中所作的经典表述上去.

## §1 Lagrange 方程及其 $G_\infty$ 群的引入

我们将只把那些我们认为是主要之点归到一起作简洁的讲述. 在这些讲述中, 我们会采用现代的术语, 遇到这种地方我们会加以指明, 决不会局限于 Lagrange 本人的讲述.

1. 一般 Lagrange 方程涉及的是任一质点系

$$m_i; \quad x_i, \quad y_i, \quad z_i, \tag{1}$$

它们可以受到这样一些 “条件方程”

$$\Phi = 0, \quad \Psi = 0, \cdots \tag{2}$$

的约束, 使得在我们正好感兴趣的区域内 $x_i, y_i, z_i$ 可以用含 $n$ 个独立参数

$$q_1, \cdots, q_n \tag{3}$$

的正则解析函数来描述. 在 (1) 式的每一个点上作用着一个力, 其分量为 $X_i, Y_i, Z_i$; 要寻求的是, 它们在 $q_1, \cdots, q_n$ 为时间 $t$ 的函数的情况下所满足的微分方程.

2. 由 Lagrange 所给出的公式, 大家都知道, 只要求一方面将系统的活力:

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right) \tag{4}$$

用 $q_\alpha, \dot{q}_\alpha$ 表示出来, 另一方面再将力在作用点的虚位移上所做的功, 也就是

$$\delta A = \sum\left(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i\right), \tag{5}$$

[1] 这本来是准备作为本书的第四章的, Klein 已不能再把它完成了. (H.)

换算成 $\sum P_\alpha \delta q_\alpha$. 于是运动方程就简单地为:

$$\frac{d\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - P_\alpha = 0. \tag{6}$$

3. 为了评估这个方程特别的有效范围, 我们必须讲清 (这在 Lagrange 那里令人吃惊地未被明确地加以强调, 而在紧接着 Lagrange 之后多多少少为人们所知), 就是在用 $q_\alpha$ 来表示 $x_i, y_i, z_i$ 的公式中, 除了 $q_\alpha$ 外还可能含有时间 $t$ (这一点, 例如在条件方程 (2) 中已经包含了 $t$ 时就必定会如此)[1]. 人们只是在计算 $\delta A$ 时才不会去一起改变 $t$, 而是一般来讲宁愿令:

$$\delta A = \sum P_\alpha \delta q_\alpha. \tag{7}$$

但在计算 $T$ 以及按时间所取的微分系数 $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ 时, 这种对时间的依赖性就会显现出来. 相应地换算后的 $T$, 一般来讲, 就会取以下的形式:

$$T = \frac{1}{2}\sum a_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + \sum b_\alpha \dot{q}_\alpha \tag{8}$$

(其中 $a_{\alpha\beta}, b_\alpha$ 理解为是 $q_\alpha$ 的, 也是 $t$ 的函数). 其中除了有 $\dot{q}$[2] 的二次项外, 还出现了线性项, 于是在计算方程 (6) 时就会出来一个附加项, 人们习惯于把它以天文学家 Clairaut (1742), 或以技术师 Coriolis (1832) 的名字来给它命名.

4. 方程 (6) 的证明自然可以从用 $x, y, z$ 写出的运动方程换算过来得到. 人们常常用变分的方法来代替上面的做法, 我们可以这样来表述, 即令

$$\bar{\underline{\int}} (\delta T + \delta A)\, dt = 0, \tag{9}$$

在积分区间内令 $q_\alpha$ 作任意的变动, 但在积分限上保持不变[3].

实际上, 在下式

$$\bar{\underline{\int}} \delta T dt = \bar{\underline{\int}} \left(\sum \left(\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\right) + \sum \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta \dot{q}_\alpha\right)\right) dt, \tag{10}$$

其中的第二部分只要通过众所周知的分部积分的方法加以变形, 并将 $\delta A$ 的定义式 (7) 代入, 我们就从 (9) 式得到了:

$$\bar{\underline{\int}} \left(\sum \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{d\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)}{dt} + P_\alpha\right)\delta q_\alpha\right) dt = 0, \tag{11}$$

[1] 对文本的说明处处可参见数学百科全书, 第 4 卷 (力学) 中引论性的条目: A.Voß 有理力学的原理.

[2] 这里原文为 $q$ 疑有误. —— 中译者注

[3] 积分限上的变分为零这一点仍然以积分号上一横杠来表示.

它就直接导致方程 (6).

5. 首先我们要问, 为什么 Lagrange 方程 (6) 这个量丛对参数 $q_\alpha$ 的任意变换, 更确切地说, 对在我们的区域中全体正则、解析的代换 $G_\infty$:

$$\begin{aligned}&q_1 = \varphi_1\left(q_1', \cdots, q_n', t'\right),\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&q_n = \varphi_n\left(q_1', \cdots, q_n', t'\right),\\&t = t'\end{aligned} \tag{12}$$

为不变的. 我们的变分原理对此给出了准确的回答. 在我们的问题中的 $T$, 从而还有 $\delta T$, 另一方面还有 $\delta A$, 从一开始就看成是给定的, 从而也就看成是不变的. 我们可以得出结论说, 在积分符号 (11) 下的积分核, 也就是

$$\sum\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{d\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)}{dt} + P_\alpha\right)\delta q_\alpha, \tag{13}$$

是一个不变量. 方程 (6) 的左边不是别的, 只不过是这个不变量中不同的 $\delta q_\alpha$ 前的系数加个负号而已. 现在我们要把量丛 $\delta q_\alpha$ 本身按照前面所讲的作类比, 称其为向量. 那么我们的系数就表示一个*逆步*的向量, 从而方程量丛的不变性由此就直截了当地确立了, *它就是要求一个逆步向量恒等于零*.

6. 我们想使我们的观点独立于其作用也许还不完全明显的分部积分. 要做到这一点只要把那在分部积分中要弃去的项保留在积分符号内, 即简单地用下面式子:

$$\delta T - \frac{d}{dt}\left(\sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\right) + \sum P_\alpha \delta q_\alpha \tag{14}$$

来代替 (13) 式 $\left(\text{因为 } \delta\dot{q}_\alpha = \delta\dfrac{dq_\alpha}{dt} = \dfrac{d\delta q_\alpha}{dt}\text{, 它与 (13) 式是一致的}\right)$.

表达式 (14) 是不变量, 因为它全部是由 (群 (12) 的) 不变量组成的.

这样我们就完全达到了采用与 Lagrange 在他的《Mécanique analytique (分析力学)》, 第 I 卷, 第 3 版, 326 页[1] 所采取的、从虚位移原理出发, 而不用变分法来推进到他的一般方程一样的结论. 实际上, 他把由上述原理所给出的方程 (这里我们保持了我们的记号)

$$\sum\left(\left(X_i - m_i\ddot{x}_i\right)\delta x_i + \left(Y_i - m_i\ddot{x}_i\right)\delta y_i + \left(Z_i - m_i\ddot{z}_i\right)\delta z_i\right) = 0 \tag{15}$$

直接改写成下面的形式:

$$\begin{aligned}&\sum\left(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i\right) - \frac{d}{dt}\left(\sum m_i\left(\dot{x}\delta x_i + \dot{y}\delta y_i + \dot{z}\delta z_i\right)\right)\\&\qquad + \delta\sum\left(\frac{m_i}{2}\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right)\right) = 0,\end{aligned} \tag{16}$$

[1] 全集, 第 11 卷.

这样它的左边现在在概念上就直接与 (14) 式一致了. Heun 先生对 Lagrange 的分析力学有过很大的贡献, 把从 (15) 式的左边到 (16) 式的左边的过渡直接称之为 Lagrange *核心方程*[1]. 同时他还对 (16) 式的思想内涵作了如下言简意赅的诠释: 作用在系统上的力所作的虚功等于 "虚的冲量功" 的变化速率减去活力的虚改变.

## §2 Lagrange 方程的 $G_\infty$ 群和 Galilei–Newton 群. Copernicus 坐标系和 Ptolemy 坐标系

众所周知, Einstein 提出了这样的要求, 一切自然定律都应该给予这样的形式, 即它们应该显然与用来确定世界点的坐标系的任意变换, 因而也就是 $x, y, z, t$ 的任意变换无关. 前面几节的叙述让我们能认识到, 这个要求 —— 在力学的领域内 —— 已经通过 Lagrange 的一般方程讲明了它能走多远. Lagrange 的原则一方面已超越了 Einstein 的公设, 因为它不只是研究单个的质点, 而是研究了质点系, 可是另一方面他又仍然回过去停留在通常的描述中, 这就是在方程 (12) 中时间 $t$ 和通常一样, 没有一起参与变换. 把时间 $t$ 也纳入一般的变换之中实际上是一个新的思想, 这是通过现代电动力学的 Lorentz 群才带来的. 抓住这个思想的原则性意义, 这是 Einstein 的独特贡献. 但是除此之外, 我们也不能忽视 Lagrange 的功绩.

我们还想力图阐明, Lagrange 方程相对于由 (12) 式所定义的群 $G_\infty$ 的不变性与相对于 Galilei–Newton 群的不变性相比到底如何, 后者我们在前一章中特别对天文学中的多体问题解释过. 那时我们是在通常的天体力学中的直角平行坐标系 —— 我们说, 在 "Copernicus (哥白尼)" 坐标系 —— 中建立了多体问题的微分方程:

$$m_i \ddot{x}_i = -k^2 \sum_k m_i m_k \frac{x_k - x_i}{r_{ik}^2}, \text{ 等等.} \tag{17}$$

像这样的一些方程在那个有十项的 $x, y, z, t$ 的线性代换群 (我们把它叫做 Galilei–Newton 群) 的作用下保持不变, 但在方程 (12) 的群 $G_\infty$ 的作用下肯定不是不变的. 为了便于比较这两个群, 我们将在 Galilei–Newton 群 $G_{10}$ 中, 正如我们在 54 页 (中译本 50 页) 上定义它时所做的那样, 将代换 $t = \pm t' + \xi_4$ 换成恒等代换. 于是就只有一个 $G_9$ 了, 它直接就是由 (12) 式所给出的群 $G_\infty$ 的一个子群.

现在我们设想来考察 $r$ 个天体, 它们的 $3r$ 个坐标 $x_i, y_i, z_i$ 是 $t$ 和 $n = 3r$ 个参数 $q_1, \cdots, q_n$ 的函数. 建立以这些 $q_\alpha$ 来表述的 Lagrange 方程 (6) 特别简单, 因为在 (14) 式中出现的力的分量允许以众所周知的方式用势能

$$U = -k^2 \sum \frac{m_i m_k}{r_{ik}} \tag{18}$$

[1] 见, 例如, Math. Enzyklopädie IV, 11, 447 页.

的偏微分系数 $-\dfrac{\partial U}{\partial x_i}, -\dfrac{\partial U}{\partial y_i}, -\dfrac{\partial U}{\partial z_i}$ 来描述; 因此我们也只要把这个 $U$ 换算成参数 $q_1, \cdots, q_n$ 的函数, 并且取

$$P_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}. \tag{19}$$

现在我们要从不变量理论的观点出发来面对这样的问题: 怎么样来理解, 这个新的方程不仅对我们刚刚所讲的 $G_9$ 为不变, 而且对 (12) 式的 $G_\infty$ 也保持不变呢? 显然只有这样, 即除了 $q_1, \cdots, q_n$ 之外, 还要考虑 $T$ 及 $U$ 和它们的微商 (只要它们出现了) 作对应于方程 (12) 的变换. 我们所谓 Lagrange 方程的不变性并不是直接对方程 (12) 的 $G_\infty$ 来讲的, 而是与 "扩张了的" 群有关, 这个群是通过我们把 $T$ 和 $U$ 作为变换后 $q'_\alpha$ 的函数的表达式加入而生成的. 根据我们对这些变换选择的不同, $T$ 和 $U$ 的形式也不同, 而用 $q_\alpha, \dot{q}_\alpha$ 写出来的方程同样也不同. 它们还能显示成一个统一的 Lagrange 方程的形式, 只是因为我们在方程中, 除了 $q_\alpha$ 外, 还引进了符号 $T$ 和 $U$.

从而 $G_9$ 自然也就保留了它与 $G_\infty$ 并肩存在的权利. 如果将代换用原来的坐标写出来, 一般是这样来表示:

$$x_i, y_i, z_i = S\left(t'; x'_i, y'_i, z'_i\right).$$

再如果, 引进个别具体的参数系 $q$ 的公式是这样:

$$x_i, y_i, z_i = V\left(t; q_1, \cdots, q_n\right);$$

由这个方程组解出的 $q_1, \cdots, q_n$ 就可表为:

$$q_1, \cdots, q_n = V^{-1}\left(t; x_1, y_1, z_1, \cdots, x_r, y_r, z_r\right).$$

于是对这组个别的参数系 $q_1, \cdots, q_n$ 来建立的多体问题的 Lagrange 方程用 $q_\alpha$ 写出来就总是对那个 $G_9$ 保持不变的, 这个 $G_9$ 可以用容易理解的符号这样来写出:

$$q_1, \cdots, q_n = V^{-1}SV\left(t; q'_1, \cdots, q'_n\right). \tag{20}$$

可是在 $G_\infty$ 这个扩大了的区域内的不变性, 正如我们已经讲过的, 只有在 "添加" 了函数符号 $T$ 和 $U$ 之后才会出现[1].

---

[1] 我们这里所谈的整个事情可以从一个简单的例子得到认识, 这个例子我们在第一章的 22 页 (中译本 21 页) 之后详细地讲过. 在那里谈的是正交线性群的不变量与一般线性群的不变量之间的关系. 一个正交不变量 (作为这种不变量它只在那些把 $x_1^2 + \cdots + x_n^2$ 变到自身的线性代换下保持不变) 也可看成是一般线性群的不变量, 条件是, 如果我们对所给的变量组 (量丛) 还引入这样的二次形式, 它们是由 $f = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ 在任意的一般线性变换下得出的. 为了作几何的解释, 还要引进一般的仿射度量, 或者 (当我们将比例 $x_1 : x_2 : \cdots : x_n$ 解释为 $R_{n-1}$ 中点的坐标时) 引进 "射影" 度量. 当我们从某个代换群的不变量理论过渡到一个包括它的更大的群上去的时候, 事情总是对应地是这样.

与这些讨论相联系的, 有一些重要的历史回忆值得一谈.

观察天文学家自然会用到的、最切近的坐标系, 就是那 "Ptolemy (托勒密) 坐标系", 即观察者所描述的天体的高度和方位角, 以及天体到观察者的立足点处的距离. 为了在这样规定的坐标系中写下太阳系中不同物体的运动方程, 我们只要回到我们的 Lagrange 方程的一般形式上去. 结果自然比我们上面在 Copernicus 坐标系中所得要复杂得多, 由此我们可以来衡量出 Copernicus 取得了多么大的进步. 他本人只很好地感觉到了空间图景的巨大简化, 在这个图景中今后人们就可以将星体的运动作定性的分类了. 接着 Galilei 和 Newton 的研究工作表明, 我们因此还可以对现象, 作用的力, 即甚至是运动方程, 以最简单的方式来表述. 行星扰动的学说就是从此产生的. 但是由所获得的动力学结论提出的力随后走得还要更远, 例如只有从这里出发才能预言 Foucault (傅科) 摆的现象. 所有这一切只有在我们采用 Copernicus 坐标系这简单方案时才好理解, 而且常常是在事后为了观察的目的起见再转化到 Ptolemy 的坐标系上去.

因而 Einstein 的要求或一般 Larange 方程的意义不能这样来理解, 似乎不管人们采用何种坐标系, 反正都一样. 如果人们一开始就知道一般 Lagrange 方程, 又如果, 后来有人发现, 有一个特殊的坐标系, 多体问题的微分方程在这个坐标系中取 (17) 式的简单形式, 而且因此由 (20) 式的形式存在的 Galilei–Newton 群来线性表述, 那将也是一个巨大的进步. 从一般的观点来讲, Copernicus 坐标系就是通过这一数学事实直接定义的.

## §3 简化变分原理, 过渡到几何

如果我们设想, 在多体问题的情况下, 作用在力学系统上的力的分量 $P_\alpha$ 按方程 (19) 通过对一个给定的势能 $U$ (它除了依赖于 $q_1, \cdots, q_n$ 之外, 还可能依赖于 $t$) 求偏微商 $-\dfrac{\partial U}{\partial q_\alpha}$ 来得到, 则变分原理 (9) 就变成了那个在德国人通常称之为 *Hamilton* 原理[1] 的式子:

$$\delta \int_{-}^{-} (T - U)\, dt = 0. \tag{21}$$

如果我们现在更进一步假设, 不论是 $T$ 还是 $U$, 都不显含 $t$, 我们就完全重新拾起了我们已经在第一卷, 第 5 章中详细叙述过的思想体系. 活力 $T$ 将成为 $\dot{q}_\alpha$ 齐次二次型

$$T = \frac{1}{2} \sum a_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta, \tag{22}$$

同时作为 Lagrange 方程的一个推论, 我们还有活力积分

$$T + U = h, \tag{23}$$

[1] 要了解原本的历史文献的情况请参阅第一卷, 第 5 章.

借助于它, 我们还可以将方程 (21) 用 Jacobi 变分原理:

$$\delta \int \sqrt{(h-U)\cdot T} dt = 0 \tag{24}$$

来代替. 这里 $t$ 还只是形式地出现. 实际上通过将 $dt$ 放入根式内, 我们就有:

$$\delta \int \sqrt{\frac{1}{2} \sum (h-U)\, a_{\alpha\beta} dq_\alpha dq_\beta} = 0, \tag{25}$$

因而, 如果我们在这个 "$q$ 的空间" 中通过下式来规定它的 "弧长的微元" $ds$:

$$ds^2 = \sum \frac{h-U}{2} a_{\alpha\beta} dq_\alpha dq_\beta, \tag{26}$$

那么我们的系统在这个 "$q$ 空间" 中的轨迹就会与这个空间中的测地线一致. 但是沿测地线经历其上一段所花的时间, 根据 (23) 式 (及 (22) 式) 由下述积分给出:

$$t = \int \sqrt{\frac{\sum a_{\alpha\beta} dq_\alpha dq_\beta}{2(h-U)}} = \int \frac{ds}{h-U}. \tag{27}$$

最后, 如果我们再进一步假设 $U$ 为常量 (从而在我们的力学系统上就不再有 "力" 的作用), 并且为了统一起见, 再令 $h-U=1$, 我们就会得到与 Riemann 几何的完全接轨. 这样一来, 在那种其中的弧元为:

$$ds = \sqrt{\frac{1}{2} \sum a_{\alpha\beta} dq_\alpha dq_\beta} \tag{28}$$

的空间 $R_n$ 中, 我们系统的轨迹与其测地线简直就完全是一致, 而且时间按照 (27) 式也直接与所经过的一段弧的弧长一致.

我们在这里只是复述了这些完全已知事情, 为的是从一开始就表明, Gauß 和 Riemann 的几何研究, 现在我们就要转过来谈它, 是如何地在 Lagrange 方程的肥沃土壤上成长起来的.

此外我们可以这样来概括今后要从事的课题. 假设在代换 (12) 中出现的 $t$ 不再明显的出现, 则由 $q$ 生成的 $R_n$ 中全体点变换 $G_\infty$ 就以公式

$$\begin{aligned} q_1 &= \varphi_1(q_1', \cdots, q_n'), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_n &= \varphi_n(q_1', \cdots, q_n') \end{aligned} \tag{29}$$

呈现在我们面前. 我们将在相关不变量理论的意义下来研究二次微分形式 $ds^2 = \sum a_{\alpha\beta} dq_\alpha dq_\beta$. 这时为了直观起见可以把 $ds$ 解释为 $R_n$ 中的弧的微分.

# B 建立在 Gauß 的《Disquisitiones circa superficies curvas (曲面理论的一般研究)》的基础之上的二维流形的内蕴几何学

## §1 概述

Gauß 的巨著, 对它我们在第一卷, 第 1 章已作过前导式的讲述, 而且它还将成为我们做进一步展开讲述的起点, 从各个不同的方面来讲都具有开创性的意义. 这部著作, 从他大地测量学的实际工作生发, 又经他对我们的空间本质的哲学思考的培育, 给了整个微分几何的理论数学方面以极其重要的推动.

就《Disquisitiones (研究)》一书的历史状况而言, 我得借助于 Stäckel 的、就是在现在看来也是以最准确的史料研究为根据的著作来讲述[1]. 向理论方面的发展首先是这样, 即 Gauß 的思想是与 Monge 从 1800 年起在他的《*Application de L'analyse à la géometrie* (分析对几何的应用)》中所给出的相联系着的, 正如 Liouville 等人在 1850 年出版的《应用》一书的第五版所表明的, 其中除了有 Louville 本人的大量进一步的讲述之外, 还发现有一处附印了 Gauß著作的地方[2]. 于是微分几何作为一个独立的分支就在所有文明的国度里得到了精心的培植. 在这里我们只要指出, 在数学百科全书 III, 3 的有关条目中是如何特别提到, 在接近 19 世纪末时有那么多的教科书这一点就足够了:

1. Darboux 所著内容丰富的四卷本的著作《*Leçon sur la théorie générale des surfaces* (曲面的一般理论讲义)》(Paris 1887—1896 年, 第 2 版 1914 年), 由同一作者所作的续篇《Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes (正交系及其曲线坐标讲义)》初版于 1898 年, 第二版于 1910 年出版.

2. Bianchi 的教科书《Lezioni di geometria differenziale (微分几何讲义)》(Pisa 1894), 其德文译本由 Lukat 于 1899 年出了它的第一版, 1910 年出了扩充后的第二版.

3. Knoblauch 的《Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen (曲面一般理论导论)》(Leipzig 1888), 在 1913 年扩充成为一本内容广泛的著述《Grundlagen der Differentialgeometrie (微分几何基础)》[3].

---

[1] Gauß 全集, 第 10 卷, IV.

[2] 见 107 页 (中译本 98 页).

[3] 这期间出版了: Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie (微分几何讲义) 第 I 卷. Berlin 1921; 第 2 卷, Berlin 1923. (H.)

从这些著作中所包含的全部有趣的课题之中我在这里只能挑某些片段来宣讲一下. Gauß 在他的著作中已经将曲面的几何区分为*外蕴的* (*äußere*) 几何和*内蕴的* (*innere*) 几何, 其中第一种处理的是曲面在三维空间中的形态, 但内蕴几何只研究那样一些问题, 它们在曲面的任一 "等距 (isometrische)" 变换下保持不变. 人们设想曲面点的坐标用两个参数 $u, v$ 来描述. 于是两个无限靠近的曲面之间的距离根据 Gauß 用下式表示:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \tag{1}$$

(其中等式右侧的二次微分形式是正定的) —— 而曲面的内蕴几何以研究所有那样一些关系为己任, 这些关系在以此 $ds^2$ 为基础的条件下, 对参数 $u, v$ 任意变换为不变. 因此它就是在上一节末 (133 页) 所提出的一般问题在 $n = 2$ 的这个最低维的情况下的几何造型.

这一几何发展在我们的描述下看来真是新的东西. Gauß 在这里默认了所讨论的是这样一种曲面, 在其上的每两个点只能用唯一的一条测地线 (或者, 像他讲的, 短程线[1]) 连接起来, 然后推行这样的思想, 通过应用这种测地线在曲面上这样来建立一种几何学, 特别是三角学, 完全类似于在平面上用直线所做过的那样. 于是两点之间的距离就根本该由它们的 "测地距离 (geodätischer Abstand)", 即由连接它们之间的测地线的长度, 来代替.

我们还可以将这些阐述以抽象的形式给出, 这就是, 我们完全放弃一个在三维空间中展开的曲面的观念, 而把变量 $u, v$ 径直解释为平面上的坐标. 然后我们再把 (1) 式看成是我们将在平面上设计的一个准几何 (Quasigeometrie) 弧元 (在这个准几何这里就根本不提三维空间). 这时连接两点之间的测地线就通过要求沿固定在这两个端点之间的曲线上的弧长的积分 $\int ds$ 应为极值 (其一阶变分为零) 来定义. 这样确定的积分值就称之为该两点的测地距离.

这一本身较为平淡约定的优点是, 它的特质, 我们在上面称之为内蕴的几何, 就绝不会丢失. 从而我们就能自由地将 $ds^2$ 取为任意的, 也包括为不定的, 微分形式. 稍后在谈 Riemann 的推广以及物理学家的新近的发展时我们会用到. 如果我们把

$$\frac{1}{2}\left(E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2\right)$$

理解为在平面 $u, v$ 上运动的、质量为 1 的质点的 "活力", 我们就得到了它与力学之间的关系.

---

[1] (以任一含有该曲线的曲面为基础的) "测地线" 这个词的使用, 根据 Stackel (Leipzig 报告 1893: 谈测地线的历史), 最初是由 Liouville (1850) 得到广泛普及的, 因而从这个时候起, 它在那个时候与实际的大地测量学的关系在 Gauß 那里还仍然如此活跃, 对理论几何学家而言却令人惊讶地退到了幕后.

于是出现了在 Gauß 的创新思想与 Hamilton 同时在 "射线系统 (*Strahlensystem*)" 方面的工作 (Transactions of the R. Irish Academy, 见第一卷, 194 页) 之间令人注目的类似性. 早在 Hamilton 之前人们就已经知道, 光线在光密度可以随位置作任意变化的介质中传播的路径可以由令沿光线所取的积分的一阶变分为零来确定 (Fermat 原理). 如果我们用 $ds$ 表这个问题中的积分核, 则 $ds^2$ 为 (如我们局限于各向同性的介质) 想象到是由空间坐标的微分 $dx, dy, dz$ 组成的某个三项二次微分形式. 到此光学就成了力学中的最小 (或者如 Hamllton 那样更谨慎地把它称之为*稳定值*) 作用原理的一个例证. 但是接下来 Hamilton 把沿光线所取积分的值理解为它的两个端点的函数. 这个积分如何随端点的移动而改变的方式, 他把它称之为作用量的*变分原理*[1] .

这实际上就是 Gauß 在 $n=2$ 时所采取的步骤, 他在这时将两点之间的测地距离置于他的研究中心.

## §2 关于测地线的微分方程

1. 对属于弧元 (1) 的测地线我们首先有变分原理

$$\delta \int_{-}^{-} \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = 0, \tag{2}$$

其中当做独立变量的有时可选 $u$, 有时又可选 $v$. 正如在 145, 146 页 (中译本 132, 133 页) 上所讲的, (2) 式等价于

$$\delta \int_{-}^{-} \left(E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2\right) dt = 0; \tag{3}$$

于是测地线就可以作为一个不受力作用的质点的轨迹来引入. 因而我们就有了两个 Lagrange 方程可用来确定测地线:

$$\begin{aligned} 2\frac{d\,(E\dot{u} + F\dot{v})}{dt} &= E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2, \\ 2\frac{d\,(F\dot{u} + G\dot{v})}{dt} &= E_v\dot{u}^2 + 2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2, \end{aligned} \tag{4}$$

计算出来结果如下:

$$\begin{aligned} 2E\ddot{u} + 2F\ddot{v} + E_u\dot{u}^2 + 2E_v\dot{u}\dot{v} + (2F_v - G_u)\,\dot{v}^2 &= 0, \\ 2F\ddot{u} + 2G\ddot{v} + (2F_u - E_v)\,\dot{u}^2 + 2G_u\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2 &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

[1] 我在第一卷的第 5 章已经详细地讲述过了, 而且还特别地讲到, 他后来对一般力学的贡献是如何从这个原理出发来形成的.

将上述等式左侧分别乘以 $\dot{u}$ 及 $\dot{v}$ 后再相加, 就可以得到活力的守恒; 这样实际上我们会得到

$$\frac{d}{dt}\left(E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2\right)=0.$$

特别地我们可以令 (见上面 146 页 (中译本 133 页)):

$$E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2=1. \tag{6}$$

这样一来时间 $t$ 就会与测地线的弧长一致, 从而对 $t$ 求的微商 $\dot{u},\dot{v},\ddot{u},\ddot{v}$ 就获得了一个简单的, 纯粹几何学上的意义.

2. 在经过所有这些准备之后, 对那些所谓的微商不仅可以方便地回归到 Leibniz 的写法 $\frac{du}{dt},\cdots,\frac{d^2u}{dt^2},\cdots$, 而且还可以用在分母上有 $dt$ 的幂乘起来, 也可以对微分

$$du, dv, d^2u, d^2v$$

进行直接运算. 这在 18 世纪总是这样做的, 而且自从 Gauß 以后在微分几何中已是一般通用了. 这不会因此有损于概念的严格性, 但却避免了符号上的一些不必要的麻烦.

据此我们在方程 (5) 中用 $dt^2$ 乘起来, 并将所得的左边记为 $2\Psi_u, 2\Psi_v$:

$$\begin{aligned}2\Psi_u &= 2Ed^2u+2Fd^2v+E_udu^2+2E_vdudv+(2F_v-G_u)\,dv^2,\\ 2\Psi_v &= 2Fd^2u+2Gd^2v+(2F_u-E_v)\,du^2+2G_ududv+G_vdv^2.\end{aligned} \tag{7}$$

这样一来方程 (5) 在任一点变换下的行为, 根据 A§1 (141, 142 页 (中译本 129 页)) 可以表征如下:

a) 把 $\delta u, \delta v$ 理解为 $u, v$ 的任意 "变分", 则

$$\Psi_u\delta u+\Psi_v\delta v \tag{8}$$

为一不变量 (因而 $\Psi_u, \Psi_v$ 为对 $\delta u, \delta v$ 的逆步向量).

b) 我们认识到这一点最简单的办法就是, 想到 (8) 式按照 Lagrange 的核心方程也可以写成如下的形式:

$$d\left(Edu\delta u+F\left(du\delta v+\delta udv\right)+Gdv\delta v\right)-\delta\left(\frac{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}{2}\right). \tag{9}$$

c) 测地线的微分方程就是说, 表示式 (9) 对任意选定的 $\delta u, \delta v$ 均应为零 (虚位移原理).

d) 正是在这里直接说出了, 在伴随有微分形式 $ds^2$ 之后, 测地线就有了与坐标系的选择无关的意义.

## §3 在不变量理论框架中 Gauß 曲面论中几个最简单的定理和概念

在这里打算简短地归纳的一些概念和定理都是在一些普通的教科书中有的.

1. 含两个同步向量 $d$ 和 $\delta$ (即 $du, dv$ 和 $\delta u, \delta v$) 的不变量:

a) "极式 (Polare)"

$$P = Edu\delta u + F\left(du\delta v + dv\delta u\right) + Gdv\delta v, \tag{11}$$[1]

这两个向量之间的夹角可借助于它表示如下:

$$\varphi = \arccos\frac{P}{ds\delta s}. \tag{12}$$

b) 相应地有

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{EG - F^2}\left(du\delta v - dv\delta u\right)}{ds\delta s}, \tag{13}$$

从而这两个向量所组成的三角形的面积由下述重要的公式

$$2\Delta = \sqrt{EG - F^2}\left(du\delta v - dv\delta u\right) \tag{14}$$

来给出.

2. 含一个逆步向量的不变量. 我们在此只限于那种最简单的情况, 在这种情况中 (除了 $ds^2$ 外) 还给定了某一个函数 $f(u, v)$, 于是在这里就可以将

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v}$$

想象为逆步向量.

a) 通常二次型理论所给出的最简单的不变量, 后来 Beltrami (根据 Lamé为数学物理所造的术语) 把它称之为 $f$ 的第一微分参数, 是:

$$D_1(f) = -\begin{vmatrix} E & F & \dfrac{\partial f}{\partial u} \\ F & G & \dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} : \left(EG - F^2\right). \tag{15}$$

b) 偏微分方程

$$D_1(f) = 1 \tag{16}$$

将曲线 $f = C$ 定义成确定我们度量的平行曲线族, 其方式是, 使得曲线 $f = C + dC$ 与曲线 $f = C$ 二者处处在正交的方向上互相拉开一段等值的距离 $dC$.

[1] 原文没有编号 (10) 公式. —— 中译者注

c) 如果取曲线族 $u=C$ 本身作为这种等距离的曲线族, 但是把曲线族 $v=C$ 取为与前者正交的轨线, 则我们会得到

$$ds^2 = du^2 + Gdv^2 \tag{17}$$

(*Gauß* 坐标).

d) 于是与 §2 的微分方程一比较就得出, 曲线族 $v=\text{const}$ 是测地线. 反之, 如果作一族测地线的正交轨线, 就会给出一族等距曲线 $u=\text{const}$ .

偏微分方程 (16) 与测地线族之间的这种相互关系属于有关一阶偏微分方程的解与其特征线之间相互关系的一般理论, 正如我们在本卷第二章 B III, §4, §5 中, 以及在第一卷, 第 5 章中, 从各个方向所讲到过的一样.

## §4 谈 Gauß 全曲率概念的引入

1. 有一个 Gauß 坐标系的特殊情形, 它就是从我们的域中任一点 $O$ 发出的测地极坐标 (*geodätischen Polarkoordinaten*) ($\varphi=\text{const}$ 为从 $O$ 点沿 "极角 (Azimut)" $\varphi$ 发出的测地线, $r=\text{const}$ 为围绕着 $O$ 点的测地圆). 如我们为它设定 (17) 式, 则我们肯定会注意到, $O$ 是这个新引入的坐标系的奇点, 但是对我们的 $ds^2$ 本身来讲, 容易理解不会有奇异性. 因此思考一下就会明白, 在 (17) 式中出现的 $G$ 在此必定有以下的形式:

$$G(r,\varphi) = r^2 + r^4\mathfrak{P}(r\cos\varphi, r\sin\varphi), \tag{18}$$

其中 $\mathfrak{P}$ 为一在原点邻域内按所引入的变量展开的收敛幂级数; 记它的常数项为 $\alpha$, 则对小的 $r$ 取近似就得到:

$$ds^2 = dr^2 + \left(r^2 + \alpha r^4\right) d\varphi^2. \tag{19}$$

2. 如果我们引进所谓的 *Riemann* 正规坐标 (*Riemannsche Normalkoordinate*), 也就是令:

$$r\cos\varphi = x, \quad r\sin\varphi = y, \tag{20}$$

那么公式 (18), (19) 的意义就会更清楚一些. 于是由 (18) 式我们得到:

$$ds^2 = \left(dx^2 + dy^2\right) + \mathfrak{P}(x,y)(ydx - xdy)^2. \tag{21}$$

与近似的 (19) 式对应地有

$$ds^2 = \left(dx^2 + dy^2\right) + \alpha(ydx - xdy)^2 \text{[1]} . \tag{22}$$

[1] 就是在这一转到正规坐标的换算中要确立, $G(r,\varphi)$ 必须具有在 (18) 式中给出的特别的形式. 对一个一般的 $G(r,\varphi)$ 我们不一定会有一个在 $O$ 的邻域内同时为有限和单值的, 和我们在 (21) 式中所有的那样的 $ds^2$. 见 W. Blaschke: 微分几何讲义, 第 2 版, 96–97 页, Berlin 1924.

3. Riemann 正规坐标由它的起点, 自然只能确定到二者之间可相差一正交代换 (即绕 $O$ 点的转动以及对一通过 $O$ 的轴的镜像对称). 但是在这里不变的不仅有 $dx^2+dy^2$, 而且还有 $(ydx-xdy)^2$. 因而在 (22) 式中出现的常数 $\alpha$ 就有了一个并非偶然有的特性: 它度量了在 $O$ 点最靠近的邻域内我们的度量对欧氏度量的偏离.

4. 就这样我们要来谈 *Gauß* 全曲率 (*Gaußsche Krümmungsmaße*) 了. 实际上它和我们的 $\alpha$ 只差一个常数因子:

$$K=-3\alpha \tag{23}$$

(加上 $-3$ 仅仅是为了能与 Gauß在外蕴几何中对曲面原来采用主曲率之积来定义 $K$ 相对接). 单个点位 $O$ 处的全曲率是直接以一个只与 $ds^2$ 本身有关的、相对于 $u,v$ 的任意变换为不变量的身份出现.

5. 我们在这里所讲的 $K$ 的引入和 Riemann 在 1854 年的就职演讲[1] 中对 $n$ 维空间所讲的是一样的. 为了进行全面的比较, 我们还只需注意到, 根据 (14) 式, $(ydx-xdy)^2$ 是那个三角形面积二倍的平方, 这个三角形由顶点为 $O$, $(dx,dy)$ 以及由公式 (22) 所确定的离开 $O$ 点同样无限靠近的点 $(x,y)$ 所构成. 这一研究相对于直接联系到 Gauß 的普通描述来讲的特点就是, 我们根本不用从 $u,v$ 的二维区域出发, 因而也就根本用不着把它解释成为三维空间中的一个曲面. "全曲率" 的称呼并未充分考虑到这个情况, 但却容易引起误解. 尽管如此, 由于它已广为传播, 我们还必须采用它.

6. 从 (19) 式可以很自然地得出全曲率的一个几何解释. 我们由此可得到一个以 $O$ 为中心, 以一个小的 $r$ 为半径的圆的周长为:

$$\Pi=\int_0^{2\pi}\left(r+\frac{\alpha}{2}r^3\right)d\varphi=2\pi r+\alpha\pi r^3, \tag{24}$$

因而

$$\alpha=-\frac{K}{3}=\lim_{r\to 0}\left(\frac{\Pi-2\pi r}{\pi r^3}\right). \tag{25}$$

考虑以后会遇到要推广到任意 $n$ 的需要, 我们还要把这个公式写成如下的形式:

$$\alpha=-\frac{K}{3}=2\lim_{r\to 0}\left(\frac{\Pi-2\pi r}{r^2\cdot 2\pi r}\right). \tag{25'}$$

我们在此还可以很容易地引进圆的面积 $J$ $\left(\text{等于}\int_0^r \Pi dr\right)$ 来替代圆周的周长 $\Pi$. 于是我们就得到:

$$J=\pi r^2+\frac{\alpha\pi r^4}{4}, \tag{26}$$

[1] "论奠定几何学基础之假设", Riemann 全集, 第 2 版, 272 页. 有 Weyl 注释的单行本, Berlin, 1919. 见本书 247 页的附录 III.

从而得

$$\alpha = -\frac{K}{3} = 4 \lim_{r \to 0} \left( \frac{J - \pi r^2}{r^2 \cdot \pi r^2} \right). \tag{27}$$

这些式子, 它们把 (不同半径的) 测地圆的周长和面积与有相同半径的欧氏圆的周长和面积联系起来, 是大约在 1860 年前后由法国的数学家从 Gauß 研究的结果推出来的. 最后我们把对整个圆周的积分改成对一段圆弧的积分, 相应地把圆面积换成该圆弧所对扇形面积, 也能得到相同的结果.

## §5 关于在任意给定的 $ds^2$ 下全曲率 $K$ 的解析表示

在我们给出了量 $K$ 的几何定义之后, 我们要来对一个任意给定的 $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ 来求它的解析表示.

Gauß 本人花了不小的力气[1], 在大量计算的基础上求得了下面的公式 (其中除了 $E, F, G$ 之外, 仅含它们对 $u$ 和 $v$ 的一阶和二阶微商):

$$\begin{aligned} 4\left(EG - F^2\right)^2 K = & E\left(E_v G_v - 2F_u G_v + G_u^2\right) \\ & + F\left(E_u G_v - E_v G_u - 2E_v F_v + 4F_u F_v - 2G_u F_u\right) \\ & + G\left(E_u G_u - 2F_v E_u + E_v^2\right) \\ & - 2\left(EG - F^2\right)\left(E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}\right). \end{aligned} \tag{28}$$

为了理解这个表达式的构造规律, 我们再次转向 Riemann —— 这一次是转向他的*悬赏应征的论文*, 这是他在 1861 年向巴黎科学院提交的, 直到 1876 年才在他的全集的补遗中发表[2]. 其中夹在一些其他的论述之中有一段简洁的阐述, 说的是如何去为依赖于 $n$ 个变量的 $ds^2$ 去构造类似的 $K$[3]. 在我们暂时局限于 $n = 2$ 的情况下, 我们将以更宽泛一些的形式来重现这一阐述.

1. 预备知识. 为了求得在 $O$ 处 $K$ 的值, 我们得先作出从 $O$ 点发出的全部测地线束. 但是真正要用到的只是它们紧靠 $O$ 的线段. 这一段可通过 §2 的微分方程 (5) 及表达式 (7) 来描述, 我们今后将和它们打交道. 我们从 $O$ 出发作两个向量, 将它们简记为 $d$ 和 $\delta$: 于是从 $O$ 发出的任一向量均可用 $\kappa d + \lambda\delta$ 来给出. 除了算符 $d^2$ 和 $\delta^2$ 外, 我们还要用到算符 $d\delta = \delta d$. 这样一来, 由两次连用向量 $\kappa d + \lambda\delta$ 所产生的二次微分就记为 $(\kappa d + \lambda\delta)^2 = \kappa^2 d^2 + 2\kappa\lambda d\delta + \lambda^2\delta^2$. 我们还总是把这些式子 —— 以及所有在下面会用到的类似的式子 —— 理解为适当的微商上的分子. 在此会引

[1] 见前引 Stäckel 文献, 134 页.

[2] Commentatio mathematica, qua respondere tentatur qeaestioni ab illustrissima Academia propossitae ··· (全集第 2 版, 391–404 页). 见本书 259 页附录 IV.

[3] 全集, 第 2 版, 402, 403 页.

起混淆的只有当今在考察多个变量的微商时所流行采用的记号. 例如, 假设我们有一两个变量 $t$ 与 $\tau$ 的函数, 则我们将用 $dt$ 与 $\delta\tau$ 来表示 $t$ 与 $\tau$ 的增量, 相应地一阶和二阶微商写成:

$$\frac{d}{dt}, \frac{\delta}{\delta\tau} \quad 以及 \quad \frac{d^2}{dt^2}, \frac{d}{dt}\frac{\delta}{\delta\tau}, \frac{\delta^2}{\delta\tau^2}.$$

(关于在一多重积分下出现的微分符号我们已经在第二章中作过类似的提示.)

我们把这种写法用到微分方程 (5): $\Psi_u = 0, \Psi_v = 0$ 中去. 这样的话我们把其中出现的 $du, dv, d^2u, d^2v$ 换成

$$(\kappa d + \lambda\delta)u, (\kappa d + \lambda\delta)v, (\kappa d + \lambda\delta)^2 u, (\kappa d + \lambda\delta)^2 v.$$

我们按 $\kappa^2, \kappa\lambda, \lambda^2$ 的顺序依次令这些项的系数 =0. 我们这样就得到了 6 个方程, 我们用尽可能易于理解的方式将它们缩写成如下:

$$\begin{aligned}
0 &= \Psi_u(d,d) = Ed^2u + Fd^2v + \frac{E_u du^2 + 2E_v du dv + (2F_v - G_u)dv^2}{2},\\
0 &= \Psi_v(d,d) = Fd^2u + Gd^2v + \frac{(2F_u - E_v)du^2 + 2G_u du dv + G_v dv^2}{2},\\
0 &= \Psi_u(d,\delta) = Ed\delta u + Fd\delta v + \frac{E_u du\delta u + E_v(du\delta v + \delta u dv) + (2F_v - G_u)dv\delta v}{2}^{[1]},\\
0 &= \Psi_v(d,\delta) = Fd\delta u + \cdots,\\
0 &= \Psi_u(\delta,\delta) = E\delta^2u + F\delta^2v + \frac{E_u\delta u^2 + 2E_v\delta u\delta v + (2F_v - G_u)\delta v^2}{2},\\
0 &= \Psi_v(\delta,\delta) = F\delta^2u + \cdots.
\end{aligned} \tag{29}$$

这 6 个方程合在一起所描述的, 我们可以把它们称之为从 $O$ 点发出的测地轨迹"邻域". 它们使得我们能够将 6 个二次微分 $d^2u, d\delta u, \delta^2u, d^2v, \cdots$ 用 4 个一次微分, 即 $du, \delta u, dv, \delta v$ 来表示.

在方程组 (29) 中每次取两个按 (8) 式的模式结合在一起, 在这同时我们再引入第三个, 仍为任意的向量 $\delta'$. 我们不再要求 $\Psi_u = 0, \Psi_v = 0$, 而是要求 $\Psi_u\delta'u + \Psi_v\delta'v$ (它对任意的坐标变换为不变量) 对 $\delta'u, \delta'v$ 全部值均为零. 然后我们再要求, 和在 (9) 式中那样, 满足从 Lagrange 所得结果转化过来的条件, 那么替代 (29) 式, 我们

[1] 这里原书第 2 式最后一项为 $G$, 第 5 式最后一项括号内的 $F_v$ 前没有因子 2, 疑有误, 今更正. —— 中译者注

就会有下面三个式子:

$$
\begin{aligned}
0 &= 2d(Edu\delta u' + F(du\delta' v + \delta' u dv) + Gdv\delta' v) - \delta'(Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2),\\
0 &= d(E\delta u\delta' u + F(\delta u\delta' v + \delta' u\delta v) + G\delta v\delta' u)\\
&\quad +\delta(Edu\delta' u + F(du\delta' v + \delta' udv) + Gdv\delta' v)\\
&\quad -\delta'(Edu\delta u + F(du\delta v + \delta udv) + G_v dv\delta v),\\
0 &= 2\delta(E\delta u\delta' u + 2F(\delta u\delta' v + \delta' u\delta v) + G\delta v\delta' v) - \delta'(E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2).
\end{aligned}
\tag{30}
$$

为了一目了然起见, 我们用下标来区分不同的变量和系数 $E, F, G$, 例如就像我们令

$$ds^2 = \sum_1^2 a_{ik} dx_i dx_k. \tag{31}$$

于是 (30) 式就可写成:

$$
\begin{aligned}
0 &= 2d\sum a_{ik}dx_i\delta' x_k - \delta'\sum a_{ik}dx_i dx_k,\\
0 &= d\sum a_{ik}\delta x_i\delta' x_k + \delta\sum a_{ik}dx_i\delta' x_k - \delta'\sum a_{ik}dx_i\delta x_k,\\
0 &= 2\delta\sum a_{ik}\delta x_i\delta' x_k - \delta'\sum a_{ik}\delta x_i\delta x_k.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

*上面所引的 Riemann 方程就以这种形式出现* (只不过是在他那里求和总是从 1 到 $n$, 这种情况我们会在后面深入讨论).

2. 决定性的结果

Riemann 在此后构造了一个由微分 $d, \delta$ 组成的表达式, 它肯定是不变量, 我们把它记为 $\Omega$

$$\Omega = \delta\delta\sum a_{ik}dx_i dx_k - 2d\delta\sum a_{ik}dx_i\delta x_k + dd\sum a_{ik}\delta x_i\delta x_k. \tag{33}$$

这里的每一项是纯粹形式地来计算的, 这时我们只要利用运算 $d$ 和 $\delta$ 之间的可对换性就可以了. 因此有, 例如:

$$\delta\delta\sum a_{ik}dx_i dx_k = \delta\left(\sum \delta a_{ik}dx_i dx_k + \sum a_{ik}\left(\delta dx_i dx_k + dx_i\delta dx_k\right)\right),$$

其中 $\delta a_{ik}$ 我们已令它 $=\sum_r \dfrac{\partial a_{ik}}{\partial x_r}\delta x_r$ 来替换了.

我们要认识到, 这个表达式是这样得到的, 就是在计算时所有含三次微分的项例如 $a_{ik}d\delta\delta x_i dx_k$ 都主动地给略去了. 因此只有一次和二次微分

$$dx_i, \delta x_i, d^2x_i, d\delta x_i, \delta^2 x_i$$

给留下来了.

现在在 (33) 式给那些二次微分代入由方程 (29) 及 (30) 或 (32) 得出的值. 这样一来 $\Omega$ 就会转变成一个新的表达式, 正如人们所预料的那样, 这是一个含一次微分 $dx_i$ 的二阶齐次式, 同样也是一个含 $\delta x_i$ 的二阶齐次式, 我们将它名为 $[\Omega]$. 人们也认识到, 如果将 $d$ 与 $\delta$ 分别换成 $\kappa d+\lambda\delta, \mu d+\nu\delta$, 则由于 $\Omega$ 本身的结构以及方程 (29) 到 (32) 的构作, 这个 $[\Omega]$ 只会改变一个常数因子, 即乘上因子 $(\kappa\nu-\lambda\mu)^2$. 因而 $\Omega$ 以及 $[\Omega]$ 是 $d$ 与 $\delta$ 的组合体 (*Kombinanten*) (见 11 页 (中译本 11 页)). 我们的结论是, $[\Omega]$ 可以写成如下的形式:

$$[\Omega]=[\text{——}]\left(dx_1\delta x_2-\delta x_1 dx_2\right)^2, \tag{34}$$

其中等式右侧方括号内的量 [——] 是某个纯粹由 $a_{ik}$ 以及它们对 $x$ 的一阶微商和二阶微商组合而成.

3. 随着这个不变量 $[\Omega]$ 的构成, 我们就稳操胜券了.

也就是说, 我们知道了有第二个带有因子 $(dx_1\delta x_2-\delta x_1 dx_2)^2$ 的不变量 (组合体), 而这个因子就是由向量 $d,\delta$ 所包围的三角形面积的平方. 实际上按照 §3, (14) 式, 用我们现在的写法表示, 就有

$$4\Delta^2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\left(dx_1\delta x_2-\delta x_1 dx_2\right)^2 . \tag{35}$$ [1]

因而 (34) 与 (35) 之商会是一个与 $d,\delta$ 无关的不变量. 接下来是 Riemann 的论断, 认为这个商与 Gauß 的全曲率只差一个常数因子; 更准确地说就是有

$$K=-\frac{[\Omega]}{8\Delta^2}, \tag{36}$$

—— 由此 $K$ 构造规律就完全清楚了.

## §6 Riemann 公式的证明以及几种相应的计算

公式 (36) 的证明用不着对任意给定的 $ds^2$ 来做; 因为 (36) 式的右边无论如何是一个不变量, 因而只需要在应用 Riemann 正规坐标的情形下证明它与在 §4 中也是在应用这个坐标来定义的 $K$ 一致就足够了*.

但是这个证明几乎不用计算就可以得到:

[1] 此外为了与真正的 Riemann 结果保持一致, 我们还可以这样来写:

$$4\Delta^2=\sum a_{ik}dx_i dx_k\cdot\sum a_{ik}\delta x_i\delta x_k-\left(\sum a_{ik}dx_i\delta x_k\right)^2. \tag{35'}$$

a) 由于对从坐标原点发出的测地轨迹形成的半球上含 $x, y$ 的高阶项尚未加考虑, 等于是以 §4 中弧元的近似式 (22) 工作, 这个式子用现在的记号写出了就是:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \alpha\left(x_2^2 dx_1^2 + x_1^2 dx_2^2 - 2x_1x_2dx_1dx_2\right). \tag{37}$$

b) 于是我们从方程组 (29) 得知, 这种情形下, 二次微分:

$$d^2x_1, d^2x_2, d\delta x_1, d\delta x_2, \delta^2 x_1, \delta^2 x_2$$

全都要设为 $= 0$.

c) 由此 $[\Omega]$ 的计算是这样, 即我们只对下述表达式

$$\Omega = \delta\delta\sum a_{ik}dx_idx_k - 2d\delta\sum a_{ik}dx_i\delta x_k + dd\sum a_{ik}\delta x_i\delta x_k$$

中的 $a_{ik}$. 从而 (37) 式中的组成部分 $dx_1^2 + dx_2^2$, 因为它的系数为常数, 不会有任何贡献. 留下来的就是要以所说的方式计算下式

$$\begin{aligned}
\alpha\{\delta\delta(x_2^2dx_1^2 &\quad -2x_1x_2dx_1dx_2 &&\quad +x_1^2dx_2^2)\\
-2d\delta(x_2^2dx_1\delta x_1 &\quad -x_1x_2dx_1\delta x_2 - x_1x_2\delta x_1dx_2 &&\quad +x_1^2dx_2\delta x_1)\\
+dd(x_2^2\delta x_1^2 &\quad -2x_1x_2\delta x_1dx_2 &&\quad +x_1^2\delta x_2^2)\},
\end{aligned}$$

而在此上面的三行中的每一行都给出相同的贡献, 为:

$$2\alpha\left(\delta x_2dx_1 - \delta x_1dx_2\right)^2,$$

于是总共就得到

$$[\Omega] = 6\alpha\left(\delta x_2dx_1 - \delta x_1dx_2\right)^2. \tag{38}$$

d) 另一方面, 由 §3, 公式 (14) 有:

$$4\Delta^2 = \left(\delta x_2dx_1 - \delta x_1dx_2\right)^2, \tag{39}$$

所以由 (36) 式就得到

$$K = -3\alpha, \tag{40}$$

这与在 §4 中用公式 (23) 所给 $K$ 的原始定义是一致的.

我们还要把这个证明与 $K$ 的另一个意义联系起来.

1. 我们在 152 页 (中译本 139 页, (17) 式) 已经研究过所谓 Gauß 坐标系, 对它有 $ds^2 = du^2 + Gdv^2$, 其中 $u = \text{const}$ 为平行线, 但 $v = \text{const}$ 是与它们正交的轨迹 (测地线). 我们想把我们的研究仅限于 $u = 0$ 的最近的邻域, 并且相应地将 $G$ 按 $u$ 的幂作级数展开, 取到这个级数的第二阶为止:

$$ds^2 = du^2 + \left(\varphi(v) + u\psi(v) + u^2\chi(v)\right)dv^2. \tag{41}$$

趁着我们还没有对 $v$ 做适当的选择之时, 我们可以做到令 $\varphi(v)=1$. 现在我们特别取 $u=0$ 本身就是一条测地线. 于是沿 $u=0$ 必须满足下述微分方程:

$$\Psi_u(d,d)=0,\quad \Psi_v(d,d)=0$$

(156 页 (中译本 142 页 (29) 式)). 但是沿 $u=0$ 本身同时也有 $du=d^2u=0$, 于是就取 $dv$ 等于弧长 $ds$, 因而又有 $d^2v=0$. 由此我们推知沿 $u=0$ 有 $G_v$ 等于零. 这样一来就必定有 $\psi(v)=0$, 从而得到:

$$ds^2=du^2+\big(1+u^2\chi(v)\big)\,dv^2. \tag{42}$$

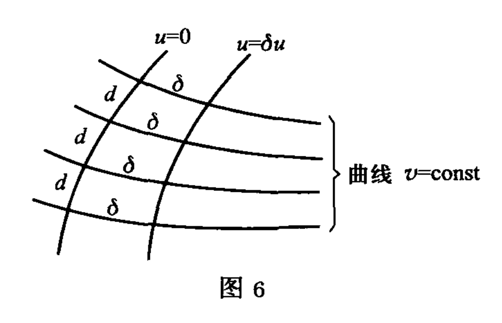



图 6

2. 现在我们以图 6 为基础来计算 $[\Omega]$ (其中向量 $\delta$ 对在 $u=0$ 上的每一点是由通过该点的 $v=\text{const}$ 的曲线上, 处于 $u=0$ 和 $u=\delta u$ 之间的这样一段来定义的, 这里 $\delta u$ 理解为与 $v$ 无关的任一数值).

我们已经有了 (对沿 $u=0$ 前进的方向而言) $d^2u=0, d^2v=0$; 现在还要加上 $d\delta u=0$ 以及 (由于 $\delta v=0$)$d\delta v=0$ 和 $\delta^2v=0$. 但是曲线 $v=\text{const}$ 本身是一条测地线, 在它上面所取的 $\delta s$ 就与 $\delta u$ 一致. 从而也要令 $\delta^2u=0$. 因此 $[\Omega]$ 的计算仍然是这样的, 即我们只保留与一次微分有关的项.

3. 现在直接计算 $[\Omega]$ 就立即得到 $\chi(v)=-K$, 从而 (总是沿 $u=0$) 有:

$$ds^2=du^2+(1-u^2\cdot K)dv^2. \tag{43}$$

我们附带地还可以作出结论: 在 $u=0$ 上的任意两点之间作一条邻近的曲线, 则在其上作相关积分

$$\int\frac{ds^2}{dt^2}dt$$

将超过下述沿 $u=0$ 所取的积分:

$$\int\left[\left(\frac{du}{dt}\right)^2-Ku^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right]dt, \tag{44}$$

由此就推出了众所周知的关于测地线 $u=0$ 弧长的二次变分的定理, 特别是得出了, 在 $K$ 为负时, 这个变分总是正的 (Jacobi)[1] .

[1] 全集 IV, 39–55 页.

4. 但是最要紧的是, 对 $K$ 有一个简单的几何解释, 它和前面所给的都不一样. 为了能更清楚地写出标记, 我们把图 6 中的四边形放大地画出来 (图 7). 于是公式 (43) 就给出 $\frac{1}{2}\delta\delta ds^2 = -K\delta u^2 ds^2$, 因而由

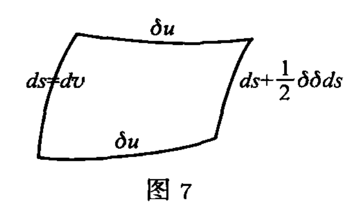



图 7

$$K = -\frac{1}{2}\frac{\delta\delta ds^2}{\delta u^2 ds^2}. \tag{45}$$

这个公式与那个方位角无关, 它是那条通过我们要求它的 $K$ 的那个点的、$u=0$ 的测地线的方位角. —— 这里面所包含着的 $K$ 的意义 (我要为此感谢 Carathéodory) 是如此美丽, 以致我在这里不能跳过它而不谈, 尽管我在后面不会用到它. 如果我们用地球表面的经圆与纬圆所代表的坐标系来思考它, 与前面所讲的 $K$ 的意义相对比的等价意义就会很清楚了. 我们前后两次来考察位于两条经圆之间的起闭合作用的纬圆长度的改变: 第一次是在极点附近, 第二次是在赤道附近.

## §7 关于两个二元 $ds^2$ 之间的等价. 全曲率为常量时的详情

a) 与每一变换群自动地联系着一个等价问题: 何时我能将两个给定的几何形体 (Gebilde) 通过该群的变换相互转化? 同样自动地有这个问题与该群的不变量理论之间的关系: 一个形体的全部不变量必须与另一个的一样.

因此直接从等价的概念导出不变量的概念是一个古老的思想. 例如, Aronhold 就在他的发表于 Crelle 62 (1863) 上的 "不变量理论的根本基础" 一文中, 对线性不变理论作过这样的探索. 只要我们不仅是停留在泛泛的一般讨论, 而且还要同时掌握所有具体的情形, 这时就会表现出复杂性.

作为例子我们可以举出在第一章 (25 页 (中译本 24 页)) 中所讲过的有关两个双线性型 $\sum \alpha_{ik}u_i x_k, \sum \beta_{ik}u_i x_k$ (带逆步变量的双线性型) 等价性的问题. 设 $\delta_{ik}$ 按众所周知方式取值: 在 $i=k$ 时, $=1, i\neq k$ 时, $=0$. 那么, 在将 $|\alpha_{ik}+\lambda\delta_{ik}|$ 以及 $|\beta_{ik}+\lambda\delta_{ik}|$ 这两个行列式理解为 $\lambda$ 的多项式时, 一般来说只要这两个多项式一致就足够了. 但是会有例外出现, 当所说的多项式作为 $\lambda$ 的函数具有多重线性因子时就是如此. 这时我们就要引进有趣的, 但也是有深远意义的[1] "初等因子" 理论. 按不变量理论来理解, 这就是说: 除了行列式 $|\alpha_{ik}+\lambda\delta_{ik}|$ 之外, 还要求出那样一些不变量, 它们是由将这个行列式用与 $x$ 同步或逆步的代换来变换的不定量来镶上 1 行, 2 行, $\cdots\cdots$, 而成的镶边行列式.

所有其他情形与此类似. 如果我们不是从等价问题开始, 而是首先提出不变量的映像定理, 以便随后检验, 人们依靠所确立的不变量是否能走得足够远, 足以解决各种情况下的等价问题, 人们这样做通常会更好一些.

[1] 这里原文为 weitschichtigen, 疑系 weitsichtigen 之误. —— 中译者注

b) 两个 (二元) 微分形式 $ds^2$ 与 $ds'^2$ 相对于我们的 $G_\infty$ 等价问题也是这样. 设 $ds^2$ 通过一代换 $x_i = \varphi_i(x_1', x_2')$ 变成 $ds'^2$, 那么全曲率 $K(x_1, x_2)$ 必定会等于全曲率 $K'(x_1', x_2')$. 同样成立的还有, 例如, 一阶微分参数 $D_1K$ 和 $D_1'K'$. 这样一来可以涉及的代换一般来说就已经确定了. 但是有我们做不到这种的情况 (当 $D_1K$ 是 $K$ 的函数之时). 这时就要拿出进一步的判据, 这种判据的现代说法 (按照 Darboux 的教科书) 可在, 例如, Voß 的论曲面的等距变换的百科全书上的条目 (=III D, 6a) 的第 19 节中找到.

在 Gauß 的曲面论出版后不久, Minding 第一个全面研究了这个问题 (Crelle 6, 1830). Minding 还特别地证明了, 在 $K$ 为常数 (即与 $x_1, x_2$ 无关时), 双方的 $K$ 相等是两个 $ds^2$ 等价的充分条件. 与此相关的是, 这样 $ds^2$ 就可置于仅与 $K$ 有关的各种不同的正规形式. 同时还有, 每一个这种正规形式, 因而单个的 $ds^2$ 也是, 能够通过一由三重无限多个的变换组成的连续群变到自身. 由此看出, 常曲率的 $ds^2$ 的理论对于研究几何的基础具有何等的意义. 在 $K = 0$ 时我们就得到了普通的 (欧氏) 平面几何的公式, 在 $K$ 为正时得到的就是球面几何, 在 $K$ 为负时得到的就是伪球面几何.

c) 关于 "常曲率" 流形 (而且不仅是有关二维的流形) 我们在本讲义的前面已经从另一个方面, 即从 Cayley 的射影度量出发引入过 (见第一卷, 149–154 页 (中译本 122–126 页), 或者还可以见第二卷, 22 页 (中译本 21 页) 上的简短的说明). 就在这里处于考察的首要地位的射影关系而言, Clifford 和我几年前就对一个重要的情况提请过大家的注意, 关于它, 例如, Enriques 在他的论几何学原理的百科全书条目 (=IIIA.BI) 中作过详细深入的讨论. 我们关于 $ds^2$ 的结构的研究首先就只涉及我们所研究的流形上的一个*单连通域*, 其中流形的点与其坐标值 $u, v$ 是唯一地对应的. 相反如果把流形的*全局性质* (*Gesamtverlauf*) 包括进来, 那么在其内部没有奇点的情况下, 在有相同的 $K$ 值时就非常好地由它所提供的*连通关系* (Zusammenhangverhältnisse) 来加以区分. 可以这样来讲, Clifford 所发现的具有代表性的例子: 曲率恒定为零 (因而处处都具有欧氏弧元) 的流形能够自行返回而很好地闭合起来, 从而它只能提供有限的总容积. 有关的教科书到目前为止, 就我所知, 只有 Killing 的书 (《几何基础引论》, I, 1893) 谈到了这件事[1]. 然而还有一个对所有的微分几何很基本的问题要处理, 而且它还可以推广到任意高阶的微分形式上去, 这问题就是: 一个无限延伸的流形具有怎样的连通关系才能与一 $ds^2$ 的给定的形式相协调.

d) 在下面我们将一直假定, $u, v$ 只能取实值. 这样一来我们就可以将微分形式 $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ 依照它对 $du, dv$ 的依赖关系根据二次型的惯性定理所给出

[1] 也可参见在当前这个时期内发表的 H.Hopf 的论文: 论 Clifford—Klein 空间问题. Math. Ann, 95 (1926). (H.)

的观点来分类. 我们至此一直所做的是, 取 $ds^2$ 为正定的, 这时我们就只有一种要加以区别的类型可供选择. 对 Lorentz 群的研究已经允许我们考虑像 $dx^2-c^2dt^2$ (或者, 在有四个变量的情形时, $dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2$) 这样的不定形式. 这就要研究如何将我们的讨论扩展到这种不定形式上去, 研究这时该如何改变或加以完善.

我们原来给 $K$ 所下的定义在过渡到不定形式的情形时要受到一定的限制. 举例来说, 我们现在就不再能像在 155 页 (中译本 140 页) 上那样, 沿测地圆整个一周积分, 而是, 按照那一节最后的说明, 只能限于对它的一段进行积分.

# C $n$ 维 Riemann 流形 I. 形式基础

我们在 B 部分所展开的阐述就已经做好了这样的准备, 使得它自身就能引导到 Riemann 所作的推广到 $n$ 维的研究上去. 我们将这样来阐述这些推广, 使得一些完全在 Riemann 意义下的创新, 它们很快就会从另一方面给出, 立即就能显现出来.

## §1 历史简述

我们先来看一下 Riemann 本人的工作:

1. 就职演说 (*Habilitationsvortrag*) (1854 年): 论奠定几何学基础之假设一文是在 Riemann 死后由 Dedekind 发表在 Göttinger Abhandlungen 的第 13 卷 (1868) 上[1].

2. 巴黎应征论文 (1861 年): *Commentatio mathematica qua respondere tentatur quaestioni ab ill. Academia Parisiensi propositae*[2]. 任务是解决一个热传导的问题, 作为这样一种问题在此我们对它不感兴趣; 但是其中有短短的一段, 是处理 $n$ 个变量的二次型的 (见全集第 2 版, 401–404 页), 而这个内容对我们来说却具有基本的意义. 这一工作 (它没有获得巴黎科学院的奖) 到了 1876 年在 Dedekind 与 Weber 的关心下通过 Riemann 全集的出版才第一次为人所知.

上面讲的第一份工作 (今后将记为 Nr.1), 由于是在全系教师前做的讲演, 几乎不含公式, 但是含有如此之多的原则性概念的阐述. Gauß 在他的曲面论一书中谨慎地保持缄默不讲的东西: 不仅涉及他对几何的进一步的发展, 而且也涉及它的基础 (因而从根本上来说也就是理论自然科学的基础), 在这里都走到了教师前台. 关于这方面我们在第一卷中已经讲过了一点. 与眼下相关的只涉及 Riemann 在 Nr.1 中已经给出了系统处理 $n$ 个变量的二次微分形式: $ds^2=\sum a_{ik}dx_idx_k$ 的基本思

[1] 见 154 页 (本书中译本 140 页) 上的尾注 1. (又见本书附录 III. —— 中译者注)

[2] 见 155 页 (中译本 141 页) 上的尾注 2. (又见本书附录 IV. —— 中译者注)

路, 特别是其中定义了一个不变量, 这个不变量看来是在 $n=2$ 的情形下我们用 $[\Omega]$ 来表示的不变量的真正的推广. 接下来就是还要从此出发来详细地阐述 Riemann 所给出的将 Gauß 全曲率推广到 $n$ 维是怎样的. —— Nr.1 发表的时候正好是我刚刚开始独立研究数学问题之际. 所以我对 Riemann 的思路在那时对年轻的数学家所产生的异乎寻常的印象至今记忆犹新. 许多对我们都显得晦涩和难于理解, 然而又感到深不可测, 在这些地方对那些从一开始就是在他的思维方式下接受了所有这一切的今天的数学家来说, 只会为他叙述的清晰和简练而惊讶不已.

接下来的 Nr.2, 叙述文本非常简短, 带来了补充公式, 特别是对任意的 $ds^2$ 的全曲率的定义式. 人们不禁要问, Riemann 怎么会把如此重要的创建托付给一篇应征的论文, 尔后却还压着不给发表 (因为科学院对这个新思想的内涵开始一点也不知道). 这里就是经济关系介入我们科学发展的切入点, 参与一项学术评奖的申报在当时还是数学研究者希望能够改善他们微薄收入的、不多的方法之一. 奖金, 它后来成为学术机构或研究所对受奖人巨大的科研能力的一种认可, 在那时还没有成为一种惯例.

Nr.1 在 1868 年的发表立即引起了其他学者的一系列进一步发展的论文. 此后 Helmholtz 论几何基础的工作我不打算在当前的情况下来谈, 关于与之平行发展的射影几何的发展, 我本人就参与到其中, 也不打算多谈. 我们在这里首先要来谈的作者是: Beltrami, Christoffel 和 Lipschitz. 由于我准备对个别的工作的历史状况还要回过来谈, 在此我就预先给出一些大面上的重要事项.

关于 Beltrami, 首先要谈的是下面两篇论文: 他的常曲率空间的一般理论 (1868, Annali di Mat. [2], II= 全集, 第 1 卷) 以及他在一任意给定弧元下的微分参数方面的研究 (1869, Atti di Bologna [2], VIII= 全集, 第 2 卷).

Christoffel 提出了两个任意的微分形式 $\sum a_{ik}dx_idx_k$ 与 $\sum b_{ik}dy_idy_k$ 之间的等价问题 (Crelles Journal 70: 论二阶齐次微分表达式的变换, 日期是 1869 年 1 月 3 日). 他究竟走了多远, 又有多少例外的情形他明显地摆到了一边, 我们将在稍后来谈. 我们预先仅只指出, 他自己也发现了 Riemann 不变量 $[\Omega]$, 并且把它放在研究的中心位置.

Lipschitz 做了大量的工作 (全都登载在 Crelles Journal 上). 第一篇的日期是 1869 年的 1 月 4 日, 并且就直接刊在第 70 卷的第 1 期 Christoffel 的论文之后. Lipschitz 在那里特别研究了那个 (被 Christoffel 排除在外, 但由 Riemann 在 Nr.2 中做出了明显的回答的) 问题, 即何时 $\sum a_{ik}dx_idx_k$ 能变成具有常系数的形式, 从而也能变成 "欧氏" 形式 $\sum dy_i^2$. 从这里出发他甚至引进了不变量 $[\Omega]$, 并且发现它恒等于零就是要寻求的必要和充分的条件. —— 关于 Lipschitz 的更进一步的工作当推那篇发表在第 72 卷 (1870) 上的论文, 因为在那里的 16, 17 页上把各种不变量生成的方法, 这些也是我们要用的, 以一目了然的方式汇集在一起, 并进一步

向各个不同的方向加以应用. 最后我们要提到在第 82 卷 (1877) 上的工作, 它与 Riemann 的应征工作的出版有关, 他在其中建立了 Riemann 本人所定义的形式 [Ω] 与由 Lipschitz 本人所推导出的公式之间的全部联系.

我在今后仍然给要做的报告以更多的系统形式的表述, 而历史形式的表述则较少, 以与我们在前面的讲述相衔接, 但是除此之外就直接看成是从前述文献的所得到的收获.

## §2 只有一阶微分的微分形式

作为我们研究的基础我们已经为流形 (为空间) 准备好了某 $n$ 个独立变量 $x_1, \cdots, x_n$, 我们可以设想它们能经过在 137 页 (中译本 125 页) 的意义下 $G_\infty$ 的所有点变换 (或者更好地说: 所有坐标变换)

$$x_i = \varphi_i(y_1, \cdots, y_n). \tag{1}$$

由于在每一点上微分数组 $dx_1, \cdots, dx_n$, 根据在 137 页 (中译本 126 页) 上的计算, 在这个变换下按下式线性代换:

$$dx_i = \sum \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} dy_k, \tag{2}$$

所以我们称它为一向量, —— 我们也可以, 像 Cauchy 在它奠定微分学的基础时所提议的那样, 随时把它设想成从点 $(x)$ 发出的一有限长的线段. 我们在第一章所论述的线性不变量理论就可以直接用到这里来, 只不过是 (2) 式的代换行列式一般来说异于 1 (而我们在第一章处理的是幺模代换).

作为我们研究的对象我们首先考虑线性形式

$$\sum u_i dx_i, \tag{3}$$

其中 $u_i$ 又依赖于 $x_1, \cdots, x_n$ 本身, 所以我们面前所有的是一个 "Pfaff 式"; 最简单的情况是, 涉及某个函数 $f$ 对 $dx$ 的微分

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

我们把数组 $u_i$ —— 如果 $\sum u_i dx_i$ 为一不变量的话 —— 称之为一逆步向量[1].

我们进一步来讨论这种数组, 它们在变换 (1) 下像 $dx_i$ —— 或 $u_i$ 也行 —— 的二阶结合那样来代换, 并将它们称之为同步或逆步张量. 于此我们还把它们区分为

[1] 今天人们用 "协变向量 (kovarianter vektor)" 来代替 "逆步向量 (kontragredienter vektor), 同时用 "逆变 (kontravariant)" 来代替 "同步 (kogredient)". 在张量方面这个用语尚犹豫未决. 再参阅 193 页 (中译本 174 页) 上的附注 1. (H.)

对称和反对称两种的情形. 在同步张量的情形下, 一对称张量的分量按

$$dx_1^2, 2dx_1dx_2, dx_2^2, \cdots \tag{4a}$$

来代换, 或者在 $d$ 和 $\delta$ 为两个同步向量时, 按下述双线性组合

$$dx_1\delta x_1, dx_1\delta x_2 + dx_2\delta x_1, dx_2\delta x_2, \cdots \tag{4b}$$

来代换, 逆步张量的情形与此类似. 作为反对称张量的情形, 我们可以取由两个向量 $d$ 和 $\delta$ 组成的子行列式

$$p_{ik} = dx_i\delta x_k - dx_k\delta x_i; \tag{5}$$

我们这样来考虑它们的线性代换, 即令数组 (4) 和 (5) 经过 (2) 式的变换. 接着我们通过设想一个给定的 $dx_i$ 的二次型

$$\sum a_{ik}dx_idx_k, \tag{6}$$

我们就有了一个对分量 (4a) 为逆步的张量 $a_{ik}$. 一个对应的交错形式

$$\sum \lambda_{ik}p_{ik} \tag{7}$$

以后我们会多次用到.

我们不打算在此系统地讲述相应的高阶微分形式, 特别是高阶 Graßmann 层量. 所有那些在代数形式的不变量理论中要讲的东西, 所有那些在仿射几何或射影几何中起作用的形式类型, 在此都是以只有一阶微分的微分形式的不变量理论来讨论的.

在此我只想对形式 $[\Omega]$, 它赋予 Riemann 全曲率的分子一个二次型 (6), 来稍微讲几句题外话. 它在代数上看起来好像是一个在 (5) 式中引入的子行列式的二次组合, 在以下我们将这样来写:

$$[\Omega] = \sum (ik, rs)p_{ik}p_{rs}. \tag{8}$$

按照第二章我们取 $n = 4$, 则这样的一个 $[\Omega]$ 在射影几何中 (其中 $p_{ik}$ 是解释为三维的空间中的齐次线性坐标) 就是一 "二阶线丛" 方程的左侧. 这里联系着我个人的一份独特的记忆, 它表明, 在不同的数学领域之间的联系是如何的少, 这在后来我们把这看成是很自然的事, 新生的第二代可是需要知道的. 我在 1868 年的秋天, 联系到我已故老师 Plücker 的研究, 选取了所谓线丛的一般理论作为课题. 评审人是 Lipschitz, 我们前面已提到, 他那时正集中精力于创建和研究微分形式 $[\Omega]$, 那时 Lipschitz 也和我一起详细谈过我的博士论文内容. 但是他对我的工作与 Riemann

的就职演讲之间的关系只字未提, 而后者在那时, 这样来说吧, 是 Lipschitz 本人吸取每日营养的对象! 而当我几年之后 (1872) 撰写我的 Erlangen 纲领时, 带着强烈的意愿, 要想能从一个统一的观点将并肩发展的几何学的研究概括起来, 我的确强烈突出地指出了, 对空间一无穷小的部分的点变换 (1) 总是具有线性变换的性质, 而我这时对 Riemann, Christoffel 和 Lipschitz 等人的工作, 它们本来能够成为对我的观点的最漂亮的佐证, 却擦肩而过.

## §3 关于 Riemann 全曲率的开场白

我们设想此后伴随有一二次微分形式:

$$f(d,d)=\sum_{1}^{n} a_{ik}dx_i dx_k, \tag{9}$$

我们把它解释为 $R_n$ 中的弧元的平方并且相应地用 $ds^2$ 来表示. 那些 $a_{ik}$ 是在我们要讨论的区域中 $x$ 的正则函数. 此时我们再次暂时假设只考虑 $x_i$ (如同 $a_{ik}$ 也是) 取实值, 同时设在这个假设下 $ds^2$ 是正定的. 于是 (9) 式的行列式

$$|a_{ik}|=a \tag{10}$$

同样也是正的.

我们首先来考虑普通的二次型的代数不变量理论并将有关定理汇总于下:

1. 和 (9) 一样, 极式

$$f(d,\delta)=\sum a_{ik}dx_i\delta x_k \tag{11}$$

也是一个不变量. 此外我们还有基本组合体:

$$F=\begin{vmatrix} f(d,d) & f(d,\delta) \\ f(\delta,d) & f(\delta,\delta) \end{vmatrix} \tag{12}$$

(它对应于从该点发出的向量 $d$ 和 $\delta$ 所确定的无限小三角形面积的平方的四倍).

2. 如果我们计算这个 $F$, 我们首先就会得到:

$$F=\sum(a_{ir}a_{ks}-a_{kr}a_{is})\begin{pmatrix} dx_i dx_r\delta x_k\delta x_s+dx_k dx_s\delta x_i\delta x_r \\ -dx_i dx_s\delta x_k\delta x_r-dx_k dx_r\delta x_i\delta x_s \end{pmatrix}, \tag{13}$$

其中求和是对 $i,k$ 及 $r,s$ 的所有满足 $r\neq s$ 的组合来进行的. 在此我们可以按二阶 Graßmann 层量 (5) 式来安排就得到:

$$F=\sum(a_{ir}a_{ks}-a_{kr}a_{is})p_{ik}p_{rs}. \tag{14}$$

这里人们注意到, 对任意 6 个这样的 $p_{ik}$, 它们含有相同的四个不同下标的, 在它们之间会有如下模式的二次恒等式 (见 6, 7 页 (中译本 7 页)):

$$P \equiv p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0. \tag{15}$$

因此我们可以将 (14) 式的右侧做各种不同的改写 (办法就是, 将 $P$ 乘上一个任意的常数后加上去). 在这样生成的所有的 $F$ 的表达式中, 那个能写成 (14) 式的是这样挑出来的, 即它是 “规范化了的”, 也就是在项 $p_{ik}p_{rs}$ 的系数之间成立的恒等式和在 $p_{ik}p_{rs}$ 本身之间成立的一样. 事实上相应于方程 (15) 我们有下述恒等式:

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{14} & a_{12} \\ a_{34} & a_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = 0, \text{等等}. \tag{16}$$

3. 行列式 $|a|$ 现在已不是不变量了. 在代换 (2) 的作用下, $\sum a_{ik}dx_idx_k$ 变成了 $\sum b_{ik}dy_idy_k$, 于是确切地说这时有

$$|b_{ik}| = r^2 |a_{ik}|, \tag{17}$$

其中 $r$ 理解为函数行列式 $\left(\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}\right)$. “对应的” 二次型 (它是由 $a$ 用逆步向量 $u$ “镶边” 而成):

$$\Phi = \begin{vmatrix} a_{ik} & u_i \\ u_k & 0 \end{vmatrix} \tag{18}$$

自身也不是不变量. 但是如果我们用 $a$ 来除 $\Phi$ 就能得到一个不变量. 特别是我们想令

$$-\frac{\Phi}{a} = \sum a^{ik}u_iu_k \tag{19}$$

$\left(\text{其中 } a^{ik} = \dfrac{\partial \log a}{\partial a_{ik}}\right)$, 并且把 (19) 式说成是对于 $f$ *互反* (*reziproke*) 的形式, 因为可以证明, 这两个形式是完全相互对立的.

4. 由 (19) 式的不变性推出, $a^{ik}$ 是对二元乘积 $dx_idx_k$ 同步的. 因而我们可以, 例如, 由 $F$(14) 式再得到一个不变量, 如果我们将其中的 $dx_idx_k$, 或者也将其中的 $\delta x_i\delta x_k$, 或者最后这二者, 换成 $a^{ik}$. 这自然不算是什么新东西, 只不过是说:

经过第一步我们得到 $(n-1)f(\delta,\delta)$ 或 $(n-1)f(d,d)$, 经过第二步得到数值 $n(n-1)$[1] .

5. 我们还想讲一个不变表达式, 它是在构造 $n$ 维流形的空间元 $f$ 时引出的. 设想从一点 $(x)$ 发出 $n$ 个线性无关的向量:

$$d^{(1)}, d^{(2)}, \cdots, d^{(n)}.$$

[1] 人们检验这种结论最简单的办法就是, 令 $f(d,d)$, 它总是可以通过引入 $dx$ 的线性组合来得到, 等于 $\sum c_idy_i^2$. 于是相应的形式就取得 $\sum \frac{v_i^2}{c_i}$ 的形式, 但 $F$ 将成为 $\sum c_ic_kp_{ik}^2$.

这个表达式就是将由相关 $dx_i^{(k)}$ 组成的行列式乘以 $a$ 的平方根所得到的

$$d\omega = \sqrt{a}\begin{vmatrix} d^{(1)}x_1 & \cdots & d^{(1)}x_n \\ d^{(2)}x_1 & \cdots & d^{(2)}x_n \\ \vdots & & \vdots \\ d^{(n)}x_1 & \cdots & d^{(n)}x_n \end{vmatrix}. \tag{20}$$

6. 现在我们转向关于 $f$ 更高一级的理论. 这时我们要处理的情况是, 它里面的 $a_{ik}$ 依赖于 $x_1, \cdots, x_n$ (就是说我们在它里面有一个逆步张量场[1] ). 要来求这样的不变量 —— 微分不变量 —— 除了包含 $a_{ik}$ 外, 还包含了 $a_{ik}$ 对 $x$ 的一阶的, 二阶的, $\cdots\cdots$ 微商* [于是对于它们的不变性就要有一个扩大了的 $G_\infty$ 来代替 $G_\infty$ (1) 更合适]. 作为这种不变量的最简单的例子可以举已在 §2 中讲到的对 Riemann 全曲率的分子的最近的研究, 我们把这个分子记为 $[\Omega]$:

$$[\Omega] = \sum(ik, rs)p_{ik}p_{rs}, \tag{21}$$

关于它的构造规律我们马上就要深入地讲. 这样一来 *Riemann* 全曲率的定义就是商:

$$K_R = -\frac{1}{2}\frac{[\Omega]}{F}. \tag{22}$$

对于 $n=2$ 这里只有唯一的一个 $p_{ik} = p_{12}$, 这样它在 (22) 式中的分子与分母中以平方出现, 这样它们就自然会约去, $K_R$ 就将成为 $a_{ik}$ 及其微分系数的函数, 因而也就是一个位置不变量 (*Ortsinvariante*); 它与 *Gauß* 全曲率是一致的. 但是对于较大的 $n$ 值, $K_R$ 除此之外还会与 $p_{ik}$ 有关, 也即与向量束 $\kappa d + \lambda\delta$ 的选择有关; 为此我们把它称之为束不变量 (*Büschelinvariante*).

自然有这样的特殊情况, 其中分子中 $p_{ik}p_{rs}$ 的系数与分母中对应的系数成正比, 而且其中突出的情况仍然是那种, 其中的 $K_R$ 还与 $x_1, \cdots, x_n$ 无关, 更确切地说, 就是一个常数. 这就是那种流形, Riemann 把它特别命名为常曲率流形[2] . 如果在特殊情况下这个常数 $K_R$ 的值为零, 我们就说这是个欧氏流形.

我们要在这里将与在 4. 中所讲的代换过程相同的过程, 一次或两次地应用到 $K_R$ 上. 第一次我们得到一个不变量, 我们把它称之为方向不变量 (*Richtungsinvariante*)(因为它只含有一组 $dx_i$ 而且为齐次零阶):

$$\frac{\sum K_{ik}dx_i dx_k}{\sum a_{ik}dx_i dx_k} = -\frac{\sum(ik, rs)\left\{\begin{matrix} a^{ir}dx_k dx_s + a^{ks}dx_i dx_r \\ -a^{is}dx_k dx_r - a^{kr}dx_i dx_s \end{matrix}\right\}}{2(n-1)f(d,d)}. \tag{23}$$

[1] 见第一章, 38 页及以后 (中译本 36 页及以后).

[2] 在此可参阅 F. Schur: 常曲率空间 II, Math, Ann, 27(1886), 537 页.

但是第二次得到的就是一个位置不变量

$$K=\frac{\sum K_{ik}a^{ik}}{n}=-\frac{\sum(ik,rs)(a^{ir}a^{ks}-a^{is}a^{kr})}{n(n-1)}. \tag{24}$$

(在 (23) 式, (24) 式左边出现的表达式 $K_{ik}$ 最易于理解的方式就是通过右边来定义). 这两个不变量我们都还会用到. 在 $n=4$ 的特殊情况下它们和 $K_R$ 一起构成了 Einstein 的引力理论以及 Hilbert 在他的《物理学的基础》(1915 年 12 月的 Göttinger Nachrichten) 所给出的创见的基础. 将 $K_R$ 中的 $dx_idx_k$ 等等用与它们同步的 $a^{ik}$ 来代替这个思想为 Lipschitz 在他的第一篇研究中作了进一步的应用[1].

## §4 测地线方程以及与之相关的不变量*

我们已经在 $n=2$ 的情形按照 Riemann 的一般原则做好了一切的准备, 以便能够做进一步的发展, 平滑地过渡到任意的 $n$ 上去.

我们仍然不来讨论测地线 (它是纯粹几何学研究的对象), 而是把由它所确定的一个质点在具有弧元 $ds^2$ 的 $R_n$ 中做自由运动时的运动方程放在首位. 于是我们相应地要处理变分问题

$$\delta\overline{\underline{\int}}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2dt=\delta\int\frac{\sum a_{ik}dx_idx_k}{dt^2}dt=0 \tag{25}$$

并且发现 (见前面 §2), 对于任意的 $\delta x_k$ 必定有下述不变量:

$$2d\left(\sum a_{ik}dx_idx_k\right)-\delta\sum a_{ik}dx_idx_k \tag{26}$$

等于零. 在计算这个表达式时首先出现的含 $d\delta$ 的项互相抵消了; 因而我们得一含微分 $\delta x_r$ 线性数组, 随 Lipschitz 我们把它记为:

$$2\sum\Psi_r(d,d)\delta x_r. \tag{27}$$

此处 $\Psi_r$ 是 $dx, d^2x$ 的下述组合:

$$\Psi_r(d,d)=\sum_i a_{ir}d^2x_i+\sum_{i,k}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ir}}{\partial x_k}+\frac{\partial a_{kr}}{\partial x_i}-\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r}\right)dx_idx_k. \tag{28}$$

因而我们就得到了作为运动方程, 以及由此得到了作为定义自由质点的运动轨迹曲线, 因而也就是测地线的公式:

$$\Psi_r(d,d)=0. \tag{29}$$

[1] 特别见: Crelles Journal 72 (1870), 33 和 34 页, 脚注. 我们在文中称为 $K$ 的, Lipschitz 称之为 $-\frac{\Psi}{n(n-1)}$, 而 Hilbert 则称之为 $-\frac{K}{n(n-1)}$.

同时由 (27) 式的不变性得出, 一般来说表达式 $\Psi_r(d,d)$ 表示一个**逆步**向量.

当我们将 $\Psi_r$ 乘以与基本形式互易的形式的系数 $a^{rs}$ 后再相加, 我们就会得到一个同步向量. 这个向量的分量将是:

$$Dx_s = d^2x_s + \sum_{i,k,r} \frac{a^{rs}}{2}\left(\frac{\partial a_{ir}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kr}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r}\right) dx_i dx_k. \tag{30}$$

因而不是 $d_{x_s}^2$ 本身, 而是这种补足了的表达式才具有向量的性质.

此外很清楚的是, 在这些定理中我们也可以用更一般一些的表达式:

$$\Psi_r(d,\delta) = \sum_i a_{ir} d\delta x_i + \sum_{i,k} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ir}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kr}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r}\right) dx_i \delta x_k \tag{31}$$

来代替 $\Psi_r(d,d)$.

对在这里到处都会出现的、$a_{ik}$ 的一阶微分系数的组合:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ir}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kr}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r}\right) \quad 以及 \quad \sum_s \frac{a^{rs}}{2}\left(\frac{\partial a_{is}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{ks}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_s}\right), \tag{32}$$

自然是每一个研究过这里呈现的问题都有过贡献. 首先 Riemann, Christoffel 和 Lipschitz 就是这样. 这些作者每个人都为它引进过特别的缩写符号. 文献不断地增加终于导致只有 Christoffel 所选择的缩写符号

$$\begin{pmatrix} i\ k \\ r \end{pmatrix} \quad 以及 \quad \begin{Bmatrix} i\ k \\ r \end{Bmatrix} \tag{33}$$

得到了传播并分别称之为第一类 *Christoffel* 符号和第二类 *Christoffel* 符号. 因而它们会自动地在测地线的理论中出现. 但是不变量 (26) 式也能从纯粹形式的理由出发作为它的最简单的类型写出, 用不着去讲变分问题.

## §5* Riemann 的 $[\Omega]$

按照 Riemann, 我们从方程 $\Psi_r = 0$ 开始. 从一点 $(x)$ 作由向量

$$\kappa d + \lambda \delta$$

组成的一完整的 "束", 并设想其中每一向量沿测地方向延伸. 我们把这样形成的称之为通过 $(x)$ 的 "测地曲面 (geodätische Fläche)". 我们这里用得着的只是, 第一, 一个我们可以把它称之为属于它的、点 $O$ 的 "邻域", 以及对应于 156 页 (中译本 142 页) 上的公式 (29), 由 $3n$ 微分方程:

$$\Psi_r(d,d) = 0, \Psi_r(d,\delta) = 0, \Psi_r(\delta,\delta) = 0 \tag{34}$$

所给定的. 这三个并列的方程具有结合体的性质 (Kombinantennatur), 这就是说, 如果我们将 $d$ 和 $\delta$ 换成由它们所确定的束 $\kappa d+\lambda\delta$ 中另两个向量, 它们总体上将保持不变.—— 我们还可以对应于公式 (30) 写成:

$$\begin{cases} d^2x_s+\sum\limits_{i,k}\begin{Bmatrix} i\ k \\ s \end{Bmatrix} dx_idx_k=0, \\ d\delta x_s+\sum\limits_{i,k}\begin{Bmatrix} i\ k \\ s \end{Bmatrix} \dfrac{dx_i\delta x_k+\delta x_idx_k}{2}=0, \\ \delta^2x_s+\sum\limits_{i,k}\begin{Bmatrix} i\ k \\ s \end{Bmatrix} \delta x_i\delta x_k=0, \end{cases} \tag{35}$$

构造 $[\Omega]$ 的第二步就是, 盯住表达式

$$\Omega=\delta\delta\sum a_{ik}dx_idx_k-d\delta\sum a_{ik}dx_i\delta x_k+dd\sum a_{ik}\delta x_i\delta x_k. \tag{36}$$

在这里有与我们在 $n=2$ 时所作过的完全相同的说明: 因为 $\Omega$ 全部都是由不变量组成, 所以它对任意代换 (1) 都是一个不变量. 此外, 经过计算得知, 它除了含有微分 $d,\delta$ 外, 还只含有像 $d^2,d\delta,\delta^2$ 这样一些二阶微分. 最后留下的就是对下述线性代换

$$d'=\kappa d+\lambda\delta,\quad \delta'=\mu d+\nu\delta,$$

仅就我们取 $\kappa\nu-\lambda\mu=1$ 而言的完全不变性 (由此得出 "结合体" 的更准确概念是作为保持不变的形式, 而不只是作为一个保持有效成立的方程组). 也许人们还会认为, 在人们可以对应于这三个命题来构建的 $\Omega$ 的所有表达式中, 这个是最简单的.

于是, 当我们现在在 (36) 式中将二阶微分 $d^2,d\delta,\delta^2$ 用它们从 (35) 式得出的值代入, 我们就会得到所要求的 $[\Omega]$

$$[\Omega]=\sum(ik,rs)p_{ik}p_{rs}. \tag{37}$$

实际上这样就会得到一个形式, 它只含有一阶微分 $dx,\delta x$ —— 这种量列的每一个都是二次齐次的 —— 它除了具有结合体的性质外, 并因此必定会是行列式 $p_{ik}$ 的一个二次齐次函数. 不过系数, 这些我们已经简记为 $(ik,rs)$, 除了含有 $a_{ik}$ 本身外, 还含有它们对 $x$ 的一阶和二阶导数. 它们算出的结果我们会马上用一般的形式给出, 但是我们预先指出, 我们绝不会用到这些一般的形式, 而是宁愿在我们所研究的每种情形中直接来构造其特定的 $[\Omega]$.

我们在从 $\Omega$ 来构造 $[\Omega]$ 的过程中始终是追随着 Riemann. Lipschitz 在他的、我们在上面提到的发表于 Crelle 82 (1877) 上的论文中将这个过程全面提升到形式

理论的高度, 他的办法就是, 不是通过方程 $\Psi_r=0$, 而是通过减去一个由表达式 $\Psi_r(d,d),\Psi_r(d,\delta),\Psi_r(\delta,\delta)$ 组成的适当的组合来消除在 $\Omega$ 中的二阶微分. 结果用我们的记号写出来就是这样:

$$[\Omega]=\Omega-2\left\{\sum a^{rs}\Psi_r(d,\delta)\Psi_s(d,\delta)-\sum a^{rs}\Psi_r(d,d)\Psi_s(\delta,\delta)\right\}. \tag{38}$$

人们立即深信这个右边加进去的项不仅是向量 $d,\delta$ 的不变量, 而且还是它们的一个结合体[1].

## §6 Riemann 全曲率的计算公式

在结束之时我再一次指出 Riemann 全曲率的定义式:

$$K_R=-\frac{1}{2}\frac{[\Omega]}{F}=-\frac{\sum(ik,rs)p_{ik}p_{rs}}{2\sum(a_{ir}a_{ks}-a_{is}a_{kr})p_{ik}p_{rs}}, \tag{22}$$

再将系数 $(ik,rs)$ 的计算得到的值代入, 这个值, 正如 Riemann 在他的巴黎应征论文 (全集, 第二版 402 页) 自己所给出, 也是在许多书中能找到的, 为:

$$\begin{aligned}(ik,rs)=&\frac{\partial^2 a_{ir}}{\partial x_k\partial x_s}+\frac{\partial^2 a_{ks}}{\partial x_i\partial x_r}-\frac{\partial^2 a_{is}}{\partial x_k\partial x_r}-\frac{\partial^2 a_{kr}}{\partial x_i\partial x_s}\\&+2\sum_{t,u}a^{tu}\left(\begin{pmatrix}i\ r\\t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k\ s\\u\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}i\ s\\t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k\ r\\u\end{pmatrix}\right).\end{aligned} \tag{39}$$

人们可以用二次恒等式 $P=0$, 这是对 $u\geqslant 4$ 时在 $p_{ik}$ 之间成立的关系式 (6, 7 页 (中译本 7 页)), 来对它做各种改变. 代入的 $(ik,rs)$ 的值可以这样来唯一地确定, 就是像对分子的系数一样来将它 "规范化", 即这样来选定, 使得在三个具有同样的四个互异指标的 $(ik,rs)$ 之间所成立的线性关系和对应的 $p_{ik}p_{rs}$ 之间所成立的线性关系一样. 于是, 正如人们立即可以算得, 在 $(ik,rs)$ 里面只有 $\frac{n^4-n^2}{12}$ 个是线性无关的.

---

[1] 遗憾的是我们在正文中不能跟踪这个理论与力学的关系, 而这是 Lipschitz 放到首位的. 我们仍旧假定: 把 $x_i$ 设想为 "时间" $t$ 的函数, 这样就令点 $(x)$ —— 我们可以给它配上一个等于 1 的 "质量" —— 以一给定的速度和加速度沿某一轨迹运动, 那么下面的式子

$$\frac{1}{dt^4}\sum a^{rs}\Psi_r(d,d)\Psi_s(d,d)$$

就是那个量, 人们按照 Gauß 把它称为质点运动的约束 (*Zwang*). 在 Lipschitz 选这作为他的论文标题的时候, 似乎他还一直没有得到几何学家们的充分注意.

类似地对于我们的最简单的方向不变量的分量有;

$$K_{ik}=\frac{1}{n-1}\left[\sum_r\left(\frac{\partial}{\partial x_r}\begin{Bmatrix}i\,k\\r\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x_i}\begin{Bmatrix}k\,r\\r\end{Bmatrix}\right)\right.$$
$$\left.+\sum_{r,s}\left(\begin{Bmatrix}i\,k\\r\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}r\,s\\s\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}i\,r\\s\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}k\,s\\r\end{Bmatrix}\right)\right],\tag{40}$$

其中 { } 理解为第二类 Christiffel 符号. 这一类的表达式, 还可以做一些推广, 首先可以在 Christoffel 的著作中找到.

# D $n$ 维 Riemann 流形 II. 正规坐标. 几何意义

至此我们已经先行讨论了形式的构造规则, 像 Riemann 在他的应征论文中所概述的那样; 现在我们要回过来研究 Riemann 在他的就职演说 (1854) 中所给出的几何思想了.

## §1 Riemann 正规坐标及其所属的 $ds^2$ 的结构

现在要做的仍然是对我们已经在 $n=2$ 已做过的那些工作的推广, 首先就是要选一个合适的坐标系 (见 158, 159 页 (中译本 144, 145 页)). 我们选位于我们所研究的空间区域中任一点作为我们坐标的原点 $O$. 我们进一步再设想构造全体从 $O$ 点发出的测地线, 它们将简单 (单连通) 地覆盖着围绕 $O$ 的一片有限区域 (我们现在只限于研究这种区域). 于是对这个区域中的每一个点, 如果给定了它离开 $O$ 的距离 $\rho$ 和它与 $O$ 相连的、发自 $O$ 的测地线方位角, 这个点就确定下来了. 为了建立相应的公式, 我们设想通过辅助变换这样来改变原来的坐标 $x_i$, 使得在点 $O$ 处的 $ds^2$ 随之取得 $\sum dx_i^2$ 的形式 (这自然是有无穷多种方式可以做到). 于是发自 $O$ 的测地线的方向就可以通过 $\left(\dfrac{dx_i}{ds}\right)_0$ 来确定. 这样我们的新坐标 (*Riemann* 正规坐标) 就可由公式

$$y_i=\left(\frac{dx_i}{ds}\right)_0\cdot\rho\tag{1}$$

来定义. 于是就有

$$\rho=\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}\tag{2}$$

并且从 $O$ 发出的测地线由 $(n-1)$ 个 $y_i$ 之间的方程组成的一方程组来表示; 这类似于一欧氏 (或更准确些讲: Graßmann 的) 空间中从一固定点 $O$ 发出的直角平行坐标. 特别是, 我们这样规定 $y_i$ 的坐标系只能确定到差一任取的齐次正交代换.

下一个要构建的、与这里有关的概念就是, 从点 $O$ 发出的 $\nu$ 维测地子空间 $(R_\nu)$. 我们把这种子空间理解为那种通过 $(n-\nu)$ 个在 $y_i$ 之间的线性独立的线性齐次方程所描写的流形 —— 或者也可看成是由我们研究的区域中的空间点组成的这样一种流形, 它们由 $\nu$ 个线性独立的向量

$$d^{(1)}y, d^{(2)}y, \cdots, d^{(\nu)}y$$

以这样一种方式来生成, 即我们令

$$dy_i = \lambda_1 d^{(1)}y_i + \lambda_2 d^{(2)}y_i + \cdots + \lambda_\nu d^{(\nu)}y_i, \tag{3}$$

并把每一个这样形成的向量作测地延伸. 先前讲到的从一点发出的测地"曲面"就是包含在我们这里的 $\nu=2$ 的情形.

这种测地 $R_\nu$ 的最简单的例子可这样来得到, 就是我们把坐标 $y_i$ 中的 $(n-\nu)$ 个, 比如说, $y_{\nu+1}, \cdots, y_n$ 置为零.

于是我们首先就得到了一个重要的定理, 这就是, 那些不为零的坐标, 也即 $y_1, \cdots, y_\nu$, 就是这个 $R_\nu$ 本身的正规坐标. 因为 $R_n$ 中从 $O$ 发出的测地线中, 那些充实于 $R_\nu$ 中的, 也必定是这个 $R_\nu$ 本身的测地线. 但是, 更进一步, 我们有我称之为*正规坐标系的可动性原理* (*Prinzip von der Beweglichkeit des Normalkoordinatensystems*): 它就是说, 我们所研究的每一个单独的 $R_\nu$ 都可以通过适当选择 $y$ 的坐标系直接用方程 $y_{\nu+1}=0, \cdots, y_n=0$ 来表示. 因为我们可以随意加到 $y$ 上去的正交变换确实含有为此所需的任意参数的个数 (新的 $y$ 甚至只能确定到我们可以对那些不为零的 $y_1, \cdots, y_\nu$ 作一个任意的正交变换, 另一方面我们又可以对那些等于零的 $y_{\nu+1}, \cdots, y_n$ 也作一个任意的正交变换).

在作了这些开场白之后就很容易给出, $ds^2$ 在以 $y_i$ 的正规坐标为基础之时应取何种形式.

我们首先来考察二维的子空间, 对于它所有的 $y_i$, 除 $y_1, y_2$ 外, 全都为零. 根据 153 页 (中译本 139 页) 上的公式 (21), 对这个子空间应有:

$$ds^2 = (dy_1^2 + dy_2^2) + \mathfrak{P}(y_1, y_2)(y_2 dy_1 - y_1 dy_2)^2, \tag{4}$$

其中 $\mathfrak{P}(y_1, y_2)$ 是指某个按 $y_1, y_2$ 的整正幂函数展开、在 $O$ 的邻域内收敛的级数. 因此在我们空间 $R_n$ 的 $ds^2$ 中令 $y_3, \cdots, y_n$ 为零就应归结为我们上面那个形式. —— 更有甚者, 根据坐标系的可动性原理, 在我们事先对 $y_1, \cdots, y_n$ 作某一齐次线性正交代换从而使新的 $y_3, \cdots, y_n$ 等于零之后, $ds^2$ 总能变成这种形式. 由此得出一个纯粹代数的结论, 即在任何情况下, $R_n$ 的 $ds^2$ 会有如下的形式:

$$ds^2 = \sum dy_i^2 + \sum \mathfrak{P}_{ik,rs}(y_1, \cdots, y_n)(y_i dy_k - y_k dy_i)(y_r dy_s - y_s dy_r), \tag{5}$$

其中 $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ 是在 $O$ 的邻域内的变量的一个适当的收敛幂级数.

接下来要讲的是那个漂亮的结果, 即这些级数, 如果它们收敛的话, 可以任取. 这一点这样来验证: 容易证明, 在以形式 (5) 的 $ds^2$ 为基础时, 如果对应于 (1) 式我们令 $dy_i$ 与 $y_i$ 成正比, 并令 $d^2y_i$ 为零, 就会使得沿如此确定的、发自 $O$ 的测地线所量得的测地距离等于 $\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}$, 那么先前为测地线所建立的方程 $\Psi_r=0$ 就能得到满足.

自然我们还可以对应于在子行列式之间成立的二次恒等式将公式 (5) 再一次规范化, 从而有

$$\mathfrak{P}_{12,34}+\mathfrak{P}_{13,42}+\mathfrak{P}_{14,23}\equiv 0, \tag{6}$$

等等.

在以下我们要假设总是有这种规范化. 于是对于 $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ 中的开头的常数项, 我们称之为 $\alpha_{ik,rs}$ 的, 特别地也有这种关系.

## §2 限制到 $O$ 的最近的邻域. $K_R$ 的一般几何意义

在我们把研究限制于点 $O$ 的最近邻域之后, 我们可以用幂级数 $\mathfrak{P}$ 的起始项来代替它, 从而用下式来代替 (5) 式:

$$ds^2=\sum dy_i^2+\sum\alpha_{ik,rs}(y_idy_k-y_kdy_i)(y_rdy_s-y_sdy_r). \tag{7}$$

对 $O$ 点本身就将为

$$\begin{aligned}&ds^2=\sum dy_i^2,\\&F=\sum p_{ik}^2\quad(\text{其中 } p_{ik}=dy_i\delta y_k-dy_k\delta y_i).\end{aligned} \tag{8}$$

此外对任一从 $O$ 发出的测地线束 $\kappa d+\lambda\delta$, 由方程 $\Psi_r=0$ 有:

$$d^2y_i=0,\quad d\delta y_i=0,\quad \delta^2y_i=0.$$

这样一来 $[\Omega]$ 的计算就和我们在 158 页 (中译本 144 页) 上对 $n=2$ 时所作的完全一样. 最终的结果就是, 在 $O$ 点的 Riemann 全曲率取下述简单的值:

$$K_R=-3\frac{\sum\alpha_{ik,rs}p_{ik}p_{rs}}{\sum p_{ik}^2}. \tag{9}$$

因此 —— 和在 $n=2$ 时一样 —— 它把最精确的结果与偏差联系起来了, 而这一偏差是由于 (7) 式的 $ds^2$ 对欧氏情形的偏离所导致的.

但是除此之外, 在我们考虑 Riemann 全曲率的不变量性质时, 通过研究一些个别的情况就立即给出它的一般的几何意义. 我们来研究子空间 $R_2$, 除 $y_1,y_2$ 外, 全

部其他 $y_i$ 均为零 (因此对它的测地线, 所有其 $i > 2$ 的 $dy_i, \delta y_i$ 也都等于零). 与它相应的 $ds^2$ 由 (7) 式给出为:

$$ds^2 = (dy_1^2 + dy_2^2) + \alpha_{12,12}(y_1 dy_2 - y_2 dy_1)^2, \tag{10}$$

而相应的 Riemann 全曲率按照 (9) 式取值为:

$$K_R = -3\alpha_{12,12}, \tag{11}$$

因而它就与由微分表达式 (10) 在坐标原点处算出的 Gauß 全曲率一致. 我们立即可作出结论:

*那个我们称之为束不变量的 Riemann 全曲率不是别的, 只不过就是一测地曲面 (球冠) 的 Gauß 全曲率, 这个测地曲面是由向量束 $\kappa d + \lambda\delta$ 沿测地线延伸而形成的.*

Riemann 在他的就职演讲中就完全是这样定义的. 当我们 (在前一节) 预先讲了 $K_R$ 不变量构成法则的之后, 我们就将结果直接倒置了, 正如就职演讲与应征论文相互并列的关系一样. 这样我们就做到了, 处处都显示出证明的基础.

## §3 位置不变量 $K$ 的几何意义

在前面 C 部的 §3 (172 页 (中译本 155 页)) 中我们已经从 Riemann 全曲率导出了一个简单的方向不变量:

$$\sum K_{ik} dx_i dx_k : \sum a_{ik} dx_i dx_k$$

以及还有这样的一个位置不变量 $K$. 因为它的定义我们是对应 (7) 式在原点 $O$ 用正规坐标写下来的, 我们可以直接得到它们的漂亮的意义, 如同 Herglotz 最近 (在 Leipzig 报告的 1916 年的 12 月号上) 所导出的.

我们开始先来讲 $K$. 因为借助于 (5) 式, 在 $O$ 点, 所有的 $a_{ii}$ 取值为 1, 其他的 $a_{ik}$ 取值为 0, 按照 (172 页 (中译本 156 页) 上的) 公式 (24) 得到在 $O$ 点的

$$K = -\frac{3\sum \alpha_{ik,ik}}{n(n-1):2}. \tag{12}$$

这里 $\frac{n(n-1)}{2}$ 恰好是束 $(i,k)$ 的个数, 这些束是作为多边形 "骨架之间的连接面" 植入 "$n$ 面形 ($n$-Bein)" $y_1, \cdots, y_n$ 的, $-3\alpha_{ik,ik}$ 属于单个束的 Gauß 全曲率. 因此我们可以这样说: $K$ 是所有这些 Gauß 全曲率的平均值. 同时 $K$ 根据它的定义与发自 $O$ 的 $y_1, \cdots, y_n$ 的 $n$ 面形的选择无关. 在这个意义上我们可以直接把 $K$ 说

成是点 $O$ 的平均 *Gauß* 全曲率[1]. 这是 Herglotz 的第一个结果, 我们现在还要用一个附加的研究加以完善:

对 $K$ 的解释在于, $\sum \alpha_{ik,ik}$ 必须在 $y$ 的任意正交代换下保持不变. 这在代数上也是很清楚的事. 因为在 $y$ 的一个正交代换下 $\sum p_{ik}^2$ 会变到自身, 即 $p_{ik}$ 也经过一个 (自然是特殊的) 正交代换, 在这个代换下 $\sum \alpha_{ik,ik}$ 以二次型 $\sum \alpha_{ik,rs}p_{ik}p_{rs}$ 最低阶的不变量的面貌出现. 此外上述线性代换有这样的性质, 即在它的作用下方程组 $P=0$ 总体保持不变, 因而表达式 $P$ 是自我线性组合在一起的. 考虑所有的不变量都应该满足的偏微分方程, 它们在 $y$ 的正交代换下保持不变, 这就直截了当地证明了, 在 "规范化的"$\alpha_{ik,rs}$ 下 (对它们有与方程 $P=0$ 相平行的线性关系成立, 179 页 (中译本 162 页) 上部), $\sum \alpha_{ik,ik}$ 是在 $\alpha_{ik,rs}$ 中唯一的、二次型 $\sum \alpha_{ik,rs}p_{ik}p_{rs}$ 的线性不变量. 我们马上就要应用到这一点, 这就是我们通过考虑围绕 $O$ 的一个小球的体积或面积来寻求 $K$ 的新意义. 这样一种新的意义根据我们在 155 页 (中译本 141 页) 上对 $n=2$ 所述就很容易理解, 并且 Runge 早就向我们提出过. 这期间 Vermeil 依照我的愿望作了为此所必需的计算[2], 我把它总结如下:

a) 代替 $y_1,\cdots,y_n$ 我们引进极坐标如下, 为了简单起见在此我们令 $n=4$:

$$\begin{gathered} y_1=\rho\cos\vartheta, \quad y_2=\rho\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y_3=\rho\sin\vartheta\sin\varphi\cos\psi, \\ y_4=\rho\sin\vartheta\sin\varphi\sin\psi. \end{gathered} \tag{13}$$

b) 于是人们很容易验证, 一个很小的测地球的体积 (其计算我们可以以 $ds^2$ 的简化形式 (7) 为基础) 与一个有相同半径的欧氏球的体积 $J$ 之间的关系可以用下述类型的公式联系起来:

$$V=J+(\alpha_{ik,rs}\text{ 的齐次线性函数})\cdot\rho^2 J. \tag{14}$$

c) 至此由我们的不变量理论的定理就直接得知, 这里出现的线性函数是 $\sum \alpha_{ik,ik}$ 的一个倍数; 还留下一个问题, 这就是确定这个倍数, 以便能为体积公式找到一个尽可能简单的表达式.

d) 因为我要略去细节的描述, 我在此只把最终的结果提出来:

$$V=J+\frac{\sum \alpha_{ik,ik}}{2(n+2)}\cdot\rho^2 J=J-\frac{n(n-1)}{6(n+2)}K\cdot\rho^2 J. \tag{15}$$

e) 由此对 $K$ 的这个新的解释我们有:

$$K=-\frac{6(n+2)}{n(n-1)}\lim_{\rho=0}\left(\frac{V-J}{\rho^2 J}\right) \tag{16}$$

[1] 这个概念自然与曲面理论中的普通的 "平均曲率" 的概念没有什么关系.

[2] Gott. Nchr., 1917 年最后一期.

(这与前面在 $n=2$ 时的公式 —— 155 页 (中译本 141 页) 上的 (27) 式 —— 是一致的).

f) 如果用球面积来代替球体积, 则只需引进体积对 $\rho$ 的微商. 由此就得出 (其中 $F$ 表欧氏球的表面积):

$$K=-\frac{n}{n(n-1)}\lim_{\rho=0}\left(\frac{O-F}{\rho^2F}\right). \tag{17}$$

g) 为了完整起见我还要指出, $J$ 可以众所周知的方式[1] 用下述公式给出:

$$\begin{aligned}&1.对偶数\ n(n=2\nu): && J=\frac{\pi^\nu\rho^n}{1\cdot 2\cdot\ \cdots\ \cdot\nu},\\ &2.对奇数\ n(n=2\nu+1): && J=\frac{\pi^\nu\rho^n}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ \cdots\ \cdot\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)}.\end{aligned} \tag{18}$$

此外, 今后对那种以不同方式来解释的 $K$ 记成 $K^{(n)}$ 更合适些, 这里 $n$ 是作为基础的空间的维数. 这立即就看出来, 这类似于, 在点 $O$, 通过 $O$ 的测地子空间 $R_{n-1}$ 的平均 Gauß 全曲率 $K^{(n-1)}$. 我们马上就会用到它.

为了清楚起见我还要指出, $K^{(1)}$ 就直接为零. 因为对 $n=1, V$ 和 $J$ 二者都等于 $2\rho$.

## §4　最简单的方向不变量的几何意义. 过渡到平均曲率 $K^{(n-1)}$

现在我们由 (7) 式来计算在点 $O$ 处最简单的方向不变量的值, 得:

$$\begin{aligned}&\frac{\sum K_{ik}^{(n)}dx_idx_k}{\sum a_{ik}dx_idx_k}\\ &=-3\frac{dy_1^2(\alpha_{12,12}+\cdots+\alpha_{1n,1n})+2dy_1dy_2(\alpha_{13,23}+\cdots+\alpha_{1n,2n})+\cdots^*}{(n-1)\sum dy_i^2}.\end{aligned} \tag{19}$$

根据正规坐标系的可动性原理, 只需对一个单一的方向 $dy$ 给出其几何解释. 然后将其结果作一般的理解. 比如说我们令所有的 $dy_i$, 除了 $dy_1$ 外, 都等于零, 这时得 (19) 式的右边为

$$-3\frac{\alpha_{12,12}+\cdots+\alpha_{1n,1n}}{(n-1)}, \tag{20}$$

它又仍然是那样一些 Gauß 全曲率的平均值, 它们是与任 $(n-1)$ 个相互正交的、由通过向量 $dy_1,\cdots,dy_n$ 的束相关的.

[1] 见, 例如 Schoute: 多维几何, 第 2 卷, 288 页, Leipzig 1905, Schubert 丛书.

这是 Herglotz 的第二个结果, 现在我们还要, 同样也是根据 Herglotz, 做一个简单的变换. 我们将和式 $\alpha_{12,12}+\cdots+\alpha_{1n,1n}$ 换成下面的差式:

$$\sum_{i,k=1,\cdots,n}\alpha_{ik,ik}-\sum_{i,k=2,\cdots,n}\alpha_{ik,ik}. \tag{21}$$

这时 (20) 式变成

$$\frac{n}{2}K^{(n)}-\frac{n-2}{2}K^{(n-1)}, \tag{22}$$

其中 $K^{(n-1)}$ 表示那个由 $y_1=0$ 给定的 $R^{(n-1)}$ 的平均 Gauß 全曲率. 在适当的意义下对每一方向 $dy_1,\cdots,dy_n$ 都有一个相应的公式. 当我们再次返回一般坐标 $x_1,\cdots,x_n$ 时, 我们就这样来等价地表述这个结果:

设 $K^{(n-1)}$ 表一 $R_{n-1}$ 的平均 Gauß 全曲率, 这个 $R_{n-1}$ 是在我们的度量意义下与方向 $dx_1,\cdots,dx_n$ 相垂直, 则我们有:

$$\frac{\sum K_{ik}^{(n)}dx_idx_k}{\sum a_{ik}dx_idx_k}=\frac{n}{2}K^{(n)}-\frac{n-1}{2}K^{(n-1)}. \tag{23}$$

在我们解出 $K^{(n-1)}$ 之后我们就得到:

$$K^{(n-1)}=\frac{nK^{(n)}\sum a_{ik}dx_idx_k-2\sum K_{ik}^{(n)}dx_idx_k}{(n-1)\sum a_{ik}dx_idx_k}\text{[1]}. \tag{24}$$

因而我们的 $K^{(n-1)}$ 本身同样也是一个方向不变量.

考虑到后面一些的讲述 (仍然是按照 Herglotz) 我们要令

$$K^{(n-1)}=\frac{\sum G_{ik}dx_idx_k}{\sum a_{ik}dx_idx_k}, \tag{25}$$

为的是由此可以预示, 这里这个张量 $G_{ik}$ 在 $n=4$ 时会在 Einstein 的引力理论中扮演一个重要的角色. 对此我们要同时指出, Einstein 本人只用了张量 $K_{ik}$, 而张量 $G_{ik}$ 是通过 Hilbert 的研究才取得它的原则性的地位. 在这期间人们对所有这些所引的文献只能有保留地理解, 就是说其前面的数值因子和符号还吃不准, 这些在我们的表述中才彻底唯一地表示了出来, 而其他一些作者则只顾他们当前的方便随意选用.

还有一事必须讲到. 这就是, 取 $n=4$ 所对应的 $ds^2$, 它是 Einstein 理论的基础, (作为 $dx_1,dx_2,dx_3,dx_4$ 的形式) 虽然其行列式不为零, 但符号是不定的: 更确切地说, 在惯性定理的意义下它相当于符号组合为 $+++-$ (参见我们在上一章中

---

[1] 这里原书分母上为 $(n-2)a_{ik}dx_idx_k$, 疑有误. —— 中译者注

经常讨论到的与 Lorentz 群相联系的 $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$). 这不妨碍我们来谈正规坐标和平均值; 它只不过是用不一致的符号来计算罢了. 相反, 在无限小球上的积分却被取消了, 因为现在 $ds^2 = 0$ 意味着一个类似于双曲体流形, 它会沿 $ds^2 = 0$ 伸展到无穷远.

## §5　在零全曲率空间或定常全曲率空间中的等价问题

在我们讲过了与 $n = 2$ 的情况的类比之后现在要来谈一谈两个 (具有 $n$ 个变量的) $ds^2$ 之间等价的问题了. 但是这一讲述我们还必须往后推一推, 因为有些辅助概念, 它们原本是要到很后面才能讲到, 我们还没有掌握. 同样我们在此还不能对 $ds^2$ 作过于一般的设定, 只要求它们能通过变换的连续族 (它们之后可证明为有限个参数的群) 可以相互转化. 我们在这里只讲这种情况, 其中的 Riemann 全曲率或是恒等于零, 或是具有一个 (与 $p_{ik}$ 以及 $x_1, \cdots, x_n$ 无关的) 常数.

这种情形的例子就近在手头:

1. *$n$ 维 "欧氏" 空间*, 其中的 $ds^2$, 用正规坐标写出来, 取下述简单的形式:

$$ds^2 = \sum dy_i^2, \tag{26}$$

但是 (5) 式中后面的项没有了, 所以 Riemann 全曲率肯定恒等于零. 这一 $ds^2$ 不仅在 $y_i$ 的正交变换下保持不变, 而且也在令 $y_i$ 增加一个任意的常数 $c_i$ 下保持不变, 这二者合起来就给出一 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 个参数的群: 欧氏运动和反转群. 其次:

2. *放置在 $(n+1)$ 维欧氏空间中的 $n$ 维球的内蕴几何.* —— 设想在所述的空间中引入一通常的互相垂直的平行坐标

$$z, z_1, z_2, \cdots, z_n.$$

于是作为一个围绕着 $O$ 的球的方程我们有

$$z^2 + z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2 = a^2, \tag{27}$$

而且这个球的内蕴度量关系肯定会在 $z, z_1, \cdots, z_n$ 的 (齐次, 线性) 正交代换群 $G_{\frac{n(n+1)}{2}}$ 下保持不变. 从现在起我们要令 $z, z_1, \cdots, z_n$ 为 $n$ 个独立参数 $x_1, \cdots, x_n$ 的这样一些函数, 使得它们能保证 (27) 式得到满足. 于是, 那个 $(n+1)$ 维空间中的 $ds^2, ds^2 = dz^2 + dz_1^2 + \cdots + dz_n^2$, 就转变为只有 $n$ 个微分的二次型:

$$ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k, \tag{28}$$

它能通过一有 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 个参数的变换群变到自身. 这些变换这样来刻画, 在 $x$ 的这样一个空间小区域, 在其中 $z$ 可以成为 $x$ 的单值函数, 在它的每一个点 $(x)$ 变到

另一个点上时, 每一个从点 $(x)$ 发出的束 $\kappa d + \lambda\delta$ 也变成另一个同样类型的束. 由此得到, (28) 式的 Riemann 全曲率必定为常数值.

最简单的看来是以通常的方式引进极坐标作为参数 $x_1, \cdots, x_n$, 比如说按下面的方式, 在此为了简短起见只取 $n = 3$ (见 181 页 (13) 式 (中译本 164 页)):

$$z = a\cos\vartheta, z_1 = a\sin\vartheta\cos\varphi, z_2 = a\sin\vartheta\sin\varphi\cos\psi, \\ z_3 = a\sin\vartheta\sin\varphi\sin\psi. \tag{29}$$

于是我们的 (28) 式的 $ds^2$ 取下面的形式:

$$ds^2 = a^2 d\vartheta^2 + a^2\sin^2\vartheta d\varphi^2 + a^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi d\psi^2. \tag{30}$$

我们现在要来向 Riemann 正规坐标过渡, 办法就是, 我们令

$$\rho = a\vartheta, y_1 = \rho\cos\varphi, y_2 = \rho\sin\varphi\cos\psi, y_3 = \rho\sin\varphi\sin\psi, \tag{31}$$

其中 $\rho$ 看得出来应该 $= \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$. 我们立即算得:

$$d\rho^2 = \sum dy_i^2 - \frac{\sum (y_i dy_k - y_k dy_i)^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}, \tag{32}$$

$$ds^2 = d\rho^2 + a^2\left(\sin\frac{\rho}{a}\right)^2 \frac{\sum (y_i dy_k - y_k dy_i)^2}{(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^2}. \tag{33}$$

这里在 $O$ 处也许不存在不连续性, 更确切地说, $ds^2$ 可以展成 $y_i$ 的正整幂的级数, 它的起始项为:

$$ds^2 = \sum dy_i^2 - \frac{1}{3a^2}\sum (y_i dy_k - y_k dy_i)^2. \tag{34}$$

于是我们认识到: *在点 $O$ 处的 Riemann 全曲率与束 $\kappa d + \lambda\delta$ 的选择无关, 因而由于有 $G_{\frac{n(n+1)}{2}}$, 对每另一个点 $(y)$ 及每另一个束, 其值为:*

$$K_R = \frac{1}{a^2}. \tag{35}$$

这一思考的几何表述在此只涉及解说的形式; 结果 (35) 式, 它也涉及任意一点 $(y)$ 与点 $O$ 的平等权利, 应该由 (32) 式, (33) 式纯粹计算地给出. 我们由此得出结论, 在我们面前的这个流形是一个常曲率的流形, 即使由 (35) 式定出来的 $K_R$ 为负, 因而开头那个球的半径为纯虚数时亦然.

由此, 当我们想用弧元来处理其他空间时, 我们就以 (32) 式, (33) 式作为处理常曲率空间型 (Raumform) 的起点, 正如它在非欧几何中作区分时一样. 曲率为零的情形排列在过渡情形, 这时我们要令 $a$ 为无穷大. 此外, 正如我们在 $n = 2$ 时已

经大致提过, 如果我们研究空间的全局行为, 还会增加进一步的区分, 要理解这些最好不是从无穷小开始, 而是把射影几何的普遍观点放在首位[1].

我们在前面所讲述的还只谈到了 Riemann 在他的就职演讲中比较容易的那一半. 主要的东西不是从 (26) 式及 (32) 式, (33) 式导出 $K_R=0$ 及 $K_R=\frac{1}{a^2}$, 而是反过来, 取 $K_R=0$ 及 $K_R=\frac{1}{a^2}$ 必定会导致 $ds^2$ 的所述形式. Riemann 只满足于给出这个事实和对他的思路做一简单的提示. 第一个, 而且相当周详的证明是由 Lipschitz 在 Crelle 70, 72 (1869, 1870) 中给出的. 较简单一些的证明是 Weber 在 Riemann 全集的第二版中关于 Riemann 的应征论文的注释中给出的 (1892). Bianchi 在 Rendiconti dell' Academia dei Lincei (5), VII 2 (1897) 从 Christofell 对两个二次微分形式的一般研究出发得出了一个证明. 在此我将简略地叙述一个更一般的, 完全是初等的定理的证明, 这是我与 Noether 女士和 Vermeil 先生共同想出来的. 关于 $K_R=0$ 以及 $K_R=\frac{1}{a^2}$ 的定理就可作为纯粹的推论由它得出.

我们已经在正规坐标的基础上得到了 178 页 (中译本 161 页) 的 (5) 式:

$$ds^2=\sum dy_i^2+\sum \mathfrak{P}_{ik,rs}(y_i dy_k-y_k dy_i)(y_r dy_s-y_s dy_r),$$

其中 $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ 我们可以取为任一按 $y$ 的正幂展开的级数 (它只需满足这样的条件, 就是对充分小的 $y$ 值为收敛). 另一方面, 我们来计算曲率 - 形式 $[\Omega]$ 的系数 $(ik,rs)$

$$[\Omega]=\sum (ik,rs)(\delta y_i dy_k-\delta y_k dy_i)(\delta y_r dy_s-\delta y_s dy_r),$$

根据 174 页 (中译本 158 页) 的 (37) 式它也是这样的一个幂级数. 我们还可以将 $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ 作多种的改变, 而不至于对 $ds^2$ 有任何改变. 为此可以用到一个有不同下标的 $p_{ik},p_{rs}$ 之间的一个恒等式

$$p_{ik}p_{rs}+p_{ir}p_{sk}+p_{is}p_{kr}=0;$$

我们在前面当只处理 $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ 的常数项时就已经将它纳入了我们的视线. 但是此外还有只有三个指标的更简单的关系;

$$y_i p_{kr}+y_k p_{ri}+y_r p_{ik}=0.$$

我们可以用这些恒等式来将 $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ 作更确切地规范化, 在此我们不作详述. 最后考虑到, 在 $(ik,rs)$ 的展开中的级数项自然会提供大量的线性关系, 它们完完全全就是相当于规范化的 $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ 的系数之间的关系.

于是由 $[\Omega]$ 的构成法则就可推出那个我们在此要用到的定理, 即, 规范化的 $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ 的级数项可以由 $(ik,rs)$ 的级数项唯一地计算出来. 对依次相连接的项我们

[1] 之所以反复指出这一点是因为, 广为流行的非欧几何的教材不讲这个观点 (例如, Bianchi-Lukat, Bonola-Liebmann 等等).

有一系列的公式, 其最低次的项由 179 页 (中译本 162 页) 上的公式 (9) 来给出, 可写成如下:

$$a_{ik,rs} = \frac{1}{6}(ik, rs)_{0,0,\cdots,0}. \tag{36}$$

特别地可推知, 如取 $K_R \equiv 0$, 则规范化的 $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ 全都等于零, 而如取 $K_R \equiv \dfrac{1}{a^2}$, 则它们就直接取 (32) 式, (33) 式的值.

人们可能会猜想, 这里描述的简单的思想可能复现了 Riemann 当年做就职演讲时眼前呈现的思路. 在那里还这么简短地写着 (全集, 第二版, 282 页), 通过全曲率可以来完全确定流形的度量: 那里普通展开的顺序与我们这里的规定是平行的. 特别是, 当他涉及上式常全曲率流形时进一步讲到: "因此围绕着一点沿各个方向的度量完全和围绕着另一点一样, 因而围绕着它可以实行同样的结构, 于是在常全曲率流形中可以给图形任意的位置", 这就不难理解了. —— 从一开始我们就要使大家理解, 为了有将常曲率流形变到自己的变换群 $G_{\frac{n(n+1)}{2}}$, 我们在本节的开头就把考察与 $(n+1)$ 维的欧式空间的 $n$ 维球联系在一起. 这在所引 Riemann 给出的结果之后自然只有教学上的意义, 自同构的存在可以从自身得出, 用不着从 $R_n$ 的 "内蕴" 几何中走出来. 但是 Riemann 还是顺便考虑了球这个例子. 因为常曲率空间的弧元形式, 他曾在上引文献中进一步给出过的

$$ds = \frac{1}{1 + \dfrac{K}{4}\sum x^2}\sqrt{\sum dx^2}, \tag{37}$$

当我们用普通的球极平面射影建立球与 $x$ 的欧式空间之间的关系时, 就立即可以给出.

# E Riemann 之后的若干进一步发展

## §1 1870 年前后出现的一些人物的个性以及他们的后续影响

我们已经在前面对 Beltrami, Christofell 以及 Lipschitz 等人的工作作了多方面的介绍, 并且多次提到了令人印象深刻的形式理论观点, 这一观点是 Lipschitz 的工作的最成熟的成果. 在我们现在要来更详细地报道这些之际, 我们必须首先要来谈一谈他们的个性以及他们发挥作用的环境条件.

Beltrami 原先开始是搞曲面理论的, 后来, 从 1869 年开始, 转向主要是搞数学物理. 在他也着手发展这里的二次微分形式的一般理论的时候, 他对理论的发展比较偏爱那些能够在物理和力学中能得到发展的问题和方法. 因此处处把变分原理和积分定理放到首位, 这些我们还会更详细地来讲.

在 Lipschitz 那里与力学和变分计算的关系也起着重要的作用. 他假设在 Lagrange 之后经 Jacobi 所发现的这个分支的整个发展继续作为是已知的. 在这里可能有某个人处于底层, 因而他的工作直至最近也只是部分得到了来自几何学家或代数学家的注意. Christofell 在这方面就显得更潇洒些, 他只用代数变形和微分. 但是关于这方面还有一些值得一谈. Lipschitz 是一个非常忠于职守的教师, 但并不是一个很有启发性魅力的老师, 而 Christofell 的启发性却是最高超的; 1869 年他从 Berlin 职业学校被聘到 Zürich 高等工业学校, 他在两地不断地促进了在他所涉及的领域内进一步的研究. 在 Berlin 对他的怀念直到今天还活在曲面理论学派的心中, 这个学派的首脑人物一度是 Weingarten. 但是他的影响从 Zürich 扩展到了意大利, 在那里 Bianchi 是他的后继者, 而且他的思想通过 Ricci 更得到了进一步的系统的发展. Ricci 为二次微分形式的不变量理论创始了一种特别的算法, 他把它称之为 "*Calcolo differenziale assoluto* (绝对微分学)"; 特别在 Mathematischen Annalen 的第 54 卷 (1900/1901) 上有他与 Levi-Civita 合写的一篇论文, 其中详细叙述了这个内容本身以及它在几何, 力学和物理中的许多问题上的应用. Ricci 把他的同胞 Beltrami 的结果远远抛到后面去了, 实际上后者只不过是提供了一些个别的不变量, 这说起来好像是 "troppo artificiosi (矫饰的胜利)".

Christoffel–Ricci 的表述得到了广泛的传播. 在 Edmund Wright 的专著《*Invariants of a quadratic form* (二次型的不变量)》中把它摆在了很高的位置 (而对 Riemann 的表述只顺带提了一下, 对 Lipschitz 的连提都没有提). 例如, Einstein 也同样是在 Christoffel–Ricci 的传统下成长起来的.

我们之所以这里讲这些情况, 因为知道这些对我们从实质上去理解有关文献看来是不可或缺的. 尽管有年报和百科全书, 尽管也有学术会议能促进数学家之间的个人关系, 在进一步的数学研究中, 偶然形成的传统和学派仍然会坚持发挥其影响.

## §2 Beltrami 的构造不变量的方法

### a) 变分计算的方法

把表达式 $\Delta_2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ (Lamé把它称之为 $u$ 的 "第二微分参数") 换算到任意的曲线坐标中去, 这是一个古老的数学物理问题. 关于这方面最简单的结果是 Jacobi (用推广了的 Lagrange 的方法) 在 Crelles Journal 第 36 卷 (1848) 中 (论方程 $\Delta_2 u = 0$ 的一个特殊解; 全集 II, 193 页及以后) 给出的. 人们在新坐标系中首先计算 $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, 并由此算出 "第一" 微分参数 $\Delta_1 u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2$. 然后注意到有下面的结论就可以得到我们要求的 $\Delta_2$

的公式, 这个结论就是, 展布在任一给定的空间区域上的积分

$$\iiint \Delta_1 u dx dy dz \tag{1}$$

是这个空间区域的不变量, 而相应的、在保持积分限固定下的变分

$$\delta \overline{\iiint} \Delta_1 u dx dy dz = -2 \overline{\iiint} \Delta_2 u \delta u dx dy dz \tag{2}$$

也必定具有不变性的意义.

后来 Beltrami 在 1868 年 (sulla theoria generale dei parametri differenziali (论微分参数的一般理论), Memorie di Bologna (2) VIII= 全集 I) 把这个结果推广到了 $n$ 个变量和一任意给定的弧元 $ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k$. 和前面一样我们用 $a$ 表 $ds^2$ 的行列式, 用 $a^{ik}$ 表示它的倒易形式的系数. 于是一个函数 $u$ 的 "第一微分参数" 就将是:

$$\Delta_1 u = \sum a^{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k}. \tag{3}$$

但是代替积分 (1) 的则是展布在任意的 $n$ 维空间区域上的下述积分:

$$\iint \cdots \int \Delta_1 u \sqrt{a} dx_1 \cdots dx_n. \tag{4}$$

"第二微分参数" $\Delta_2 u$ 现在我们就以下面的方式来定义, 即我们令保持积分限不变而构成的变分为:

$$\delta \overline{\iint \cdots \int} \Delta_1 u \sqrt{a} dx_1 \cdots dx_n = -2 \overline{\iint \cdots \int} \Delta_2 u \delta u \sqrt{a} dx_1 \cdots dx_n. \tag{5}$$

这里根据变分法的规则应有:

$$\Delta_2 u = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_i \frac{\partial \left( \sqrt{a} \sum_k a_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)}{\partial x_i} \tag{6}$$

并且因为只用不变量的组合来计算, 这就是说它也是一个不变量.

在此所述的构成不变量的方法以后还会多次用到.

我们想在这里从一开始就强调指出, 在 $\Delta_2 u$ 中的无理因子 $\sqrt{a}$ 的出现只是一种表面现象, 其实在完成 (6) 式中所含的微分运算之后就会自动消除. —— 此外我们当然还可以, 这一点也和 Beltrami 所做过的一样, 通过直接计算微商来证明对任意坐标变换的不变性. 在变分计算中通过分部积分而实现的由 (5) 式到 (6) 式的过渡这一特殊的变换, 应该完全有可能用一个代数恒等式来代替. 我们在上面 142 页 (中译本 129 页) 上对在单质点系统中出现的最小作用量积分, 借助于它过渡到 Lagrange 的 "核心方程", 就是这样做的. 然而对于像在这里以及在后面所遇到的多重积分, 还没有人做过.

### b) 积分关系式的方法

对这个刚刚解决了的问题的一个推广是这样的, 构造 $n$ 维空间中一任意给定的向量场的散度. 与前一章相对比, 在那里我们始终都是运用正交坐标, 现在我们还必须确定, 我们的向量分量对 $dx_i$ 是同步的, 还是逆步的. 首先要解决的特殊情况中的分量 $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ 是逆步的, 因而在一般的情况下我们也可首先取逆步分量, 我们把它们记为

$$u_1, u_2, \cdots, u_n. \tag{7}$$

于是第一件要做的事当然就是设法从它们得到同步分量, 办法就是, 比如说, 令

$$\xi_i = \sum a^{ik} u_k. \tag{7'}$$

此外我们可以比如这样来先走一步: 我们利用 Graßmann 行列式构造不变量

$$d\omega = \sqrt{a}\begin{vmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_n \\ d^{(1)}x_1 & \cdots & d^{(1)}x_n \\ \vdots & & \vdots \\ d^{(n-1)}x_1 & \cdots & d^{(n-1)}x_n \end{vmatrix} \tag{8}$$

(其中符号 $d^{(1)}, \cdots, d^{(n-1)}$ 为某 $(n-1)$ 个同步微分). 由此又得到了展布在任一 $(n-1)$ 维流形上的不变积分:

$$\iint \cdots \int d\omega. \tag{9}$$

现在我们选这个流形是这样一种特别的、以能包围某个 $n$ 维空间区域的方式封闭起来的流形. 于是我们可以把 (9) 式转化为展布在这个空间区域上的 $n$ 重积分, 它在通常的空间微分的书写方式下有以下形式:

$$\iint \cdots \int \left( \frac{\partial \sqrt{a}\xi_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \sqrt{a}\xi_n}{\partial x_n} \right) dx_1 dx_2 \cdots dx_n. \tag{10}$$

我们通过在分母与分子上补上因子 $\sqrt{a}$, 我们就认出

$$\frac{\dfrac{\partial \sqrt{a}\xi_1}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial \sqrt{a}\xi_n}{\partial x_n}}{\sqrt{a}} \tag{11}$$

是一个位置不变量. 一般而言它意味着我们的向量场 (7) 的散度, 因为在正交平行坐标的情形下它正是如此.

就我所知, 这整个计算是由 Beltrami 首先给出的, 自然是在 $n = 3$ 的特殊情况下在一种适合那里的几何基础之上完成的. 人们可参见他的《Ricerche sulla cinematica dei fluidi (流体运动学的研究)》, 第一部分 (Memoria di Bologna (3), I, 1871= 全集 II).

## §3 Lipschitz 与 Christoffel: 通过微分和消元法, 特别是通过“逆步微分”构造不变量

在前一节所讲的构造不变量的方法在某种意义上可说成是“超越的”方法, 因为在它的应用过程中不仅要用到微分, 而且还要用到积分. 与其相反, 现在我们要回到初等的起点上来, 我们在 C 部用它导出过基本不变量 [Ω] (Riemann 曲率形式), 它的基本思想可以比如这样来表述:

“有可能这样来处理不变量的构成问题, 即总的来说, 只含 $x_i$ 的一阶微分. 如果 $J$ 是头一个这样的不变量, 那么自然 $\delta J$, 或 $\delta\delta J, \cdots$ 或这种表达式的任意的组合本身又都是不变量. 于是要想这些组合不含对 $x_i$ 的高于二阶的微分, 那我们就可以通过减去一个在测地线理论中出现的不变量的适当的组合消除这些二阶微分, 于是由此又得到一个只含一阶微分的不变量”.

Lipschitz 在 Crelle 72, 16–17 页 (1870) 上所给出的方法就是这样讲的, 并且首先应用于尽可能直接地来计算一个二次线性不变量 $\Psi(d'_x, \delta'_x, d_x, \delta_x)$, 如果我们在其中令 $d'_x = d_x, \delta'_x = \delta_x$, 就可由它形成我们的 [Ω]. 于是 Lipschitz 继续写道:“为了从一个与 $f(x)$ 共变的多重线性形式:

$$F(d^{(1)}x, d^{(2)}x, \cdots, d^{(n)}x)$$

导出一个具有相同性质的、其微分系统中的重数增加了一重的形式, Christoffel 先生的方法 (Crelle 70, 57 页, 1869) 也是建立在同一基础之上的.”

这些方法要在这里加以叙述, 因为它们对 Christoffel 本人的推进以及整个与之相关的文献都是基本的. 特别是它们还被 Ricci 在他的绝对微分学中推到了突出的地位, 并将其称之为“共变”微分; 我们将对应于我们自己所确定的用语, 宁愿说成是逆步微分[1]. 我们从最简单的例子开始. 设已给一 Pfaff 表达式

$$\sum_i u_i dx_i \tag{12}$$

(即一逆步向量场 $u_1, \cdots, u_n$), 因而这就等于说取作为我们要写下的一系列的不变量中的一个基本形式. 我们构造 $\delta\left(\sum u_i dx_i\right)$, 把它写成:

$$\delta\left(\sum u_i dx_i\right) = \sum_{i,k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i \delta x_k + \sum_r u_r \delta dx_r. \tag{13}$$

另一方面我们在测地线的理论中 (173 页 (中译本 156 页)) 构造了与 $dx_r$ 同步的向

[1] Riccid 的命名今天几乎已经被普遍接受. 见 167页 (中译本 151 页) 注 1. 在 $a_{ik} = \text{const}$ 时, 即对欧氏空间, 共变微分就过渡到普通的微分. (H.)

量:

$$\delta dx_r + \sum_{i,k} \begin{Bmatrix} i\ k \\ r \end{Bmatrix} dx_i \delta x_k$$

(其中的曲括号是所谓第二类 Christoffel 符号). 这样我们又多有了一个不变量:

$$\sum_r u_r \delta dx_r + \sum_{i,k,r} \begin{Bmatrix} i\ k \\ r \end{Bmatrix} u_r dx_i \delta x_k. \tag{14}$$

我们从 (13) 式中减去 (14) 式, 就得到一个作为只含一阶微分的新不变量的双线性型:

$$\sum_{i,k} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \sum_r \begin{Bmatrix} i\ k \\ r \end{Bmatrix} u_r \right] dx_k \delta x_k, \tag{15}$$

我们把它简记为

$$(\delta) \left( \sum_i u_i dx_i \right). \tag{15'}$$

将这些结果推广到高阶的情形可以这样来做, 正如已经指出过的, 用一个多重线性形式代替线性形式 (12) 来作为基础. 比如我们一开始就取双线性形式

$$\sum_{i,k} u_{ik} dx_i d'x_k. \tag{16}$$

于是作为导出不变量首先就有:

$$\begin{aligned} \delta \left( \sum_{i,k} u_{ik} dx_i d'x_k \right) = & \sum_{i,k,l} \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_l} dx_i d'x_k \delta x_l{}^{[1]} \\ & + \sum_{r,k} u_{rk} d'x_r \delta dx_k + \sum_{i,s} u_{is} dx_i \delta d'x_s, \end{aligned} \tag{17}$$

此外, 作为按照测地线理论得出的不变量为:

$$\begin{aligned} & \sum_{r,k} u_{rk} d'x_k \left( \delta dx_r + \sum_{i,l} \begin{Bmatrix} i\ l \\ r \end{Bmatrix} dx_i \delta x_l \right) \\ \text{以及 } & \sum_{i,s} u_{is} dx_i \left( \delta d'x_s + \sum_{k,l} \begin{Bmatrix} l\ k \\ s \end{Bmatrix} d'x_k \delta x_l \right) \end{aligned}. \tag{18}$$

通过从 (17) 式中减去 (18) 的两式, 我们就得到了下面的三重线性不变量:

$$\sum_{i,k,l} \left( \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_l} - \sum_r \begin{Bmatrix} i\ l \\ r \end{Bmatrix} u_{rk} - \sum_s \begin{Bmatrix} l\ k \\ s \end{Bmatrix} u_{is} \right) dx_i d'x_k \delta x_l, \tag{19}$$

[1] 这里第二行第一项最后的微分的下标原书为 $r$. —— 中译者注

由此类推.

自然没有什么东西会妨碍让这些公式中的微分序列 $dx_i, d'x_i, \cdots$ 可以重合, 从而过渡到这样的微分形式, 它的单个的微分都是高阶的. 反之, 人们总可以通过构成适当的极式用各种序列 $dx_i, d'x_i, \cdots$ 的多重线性组合来代替预先给定的高阶不变量.

作为个别讲述还有以下几点值得来谈一谈:

1. $ds^2$ 及其极式

$$\sum a_{ik} dx_i d'x_k$$

的逆步导数恒等于零 (Ricci 与 Levi-civita, Math. Ann. 54, 138 页).

2. 如在 (15) 式中将 $dx_i, \delta x_k$ 代之以与其同步的 $a^{ik}$, 则我就会得到向量场 $u$ 的散度的有理形式如下:

$$\sum_{i,k}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k}-\sum_r\left\{\begin{matrix} i\ k \\ r \end{matrix}\right\}u_r\right]a^{ik} \tag{20}$$

(这是我们已在上面 192 页 (中译本 173 页) 上以无理的形式导出过的); 见 Math. Ann. 54, 195 页.

3. 为了要通过逆步微分得到 Riemann 曲率形式的系数 $(ik, rs)$, 我们需要拐点小弯, 要从后面讲起. 这就是我们从 Lipschitz 的 $\Psi$, 它我们在上面 (193 页 (中译本 174 页)) 讲到过, 通过引入 $\sum\limits_p a^{ik}u_p$ 来代替 $d'x_i$, 这样来导出一个新的不变量:

$$\sum_{i,k,r,s,p}(ik, rs)a^{ip}u_p\delta' x_k dx_r \delta x_s. \tag{21}$$

同样是这样, 通过作差

$$(\delta)(\delta')\left(\sum u_i dx_i\right)-(\delta')(\delta)\left(\sum u_i dx_i\right), \tag{22}$$

我们可以由 $\sum\limits_i u_i dx_i$ 生成含 $\delta' x, dx, \delta x$ 的三重线性形式. 请参见 Math. Ann. 54, 143 页. (这就是 Einstein 在他的论广义相对论的论文, Ann.d.Phys. 49, 1916, 中奔向 $(ik, rs)$ 的方式.)

## §4 谈 Christoffel 在 1869 年的论文

现在我们已经具备了一切的先决条件来讲在 166 页 (中译本 150 页) 上所提到的 Christoffel 在 1869 年的那篇论文, 描写它的结构和结果的特点; 我们的报道与上一节结尾的说明很好地衔接在一起.

1. 正如前面已经提到的, Christoffel 从未使用过积分计算和变分计算; 他的唯一的工具就是微分和代数消除法.

2. 此外, 开始他绝不会, 像我们后来那样, 去发展用直接的方法来构造预先给定的二次微分形式 $\sum a_{ik}dx_idx_k$ 的不变量 (或者, 像他说的, 共变量). 它宁愿从等价问题出发: 何时 $\sum a_{ik}dx_idx_k$ 能借助于一代换 $x_i = \varphi_i(x'_1, \cdots, x'_n)$ 变换成预先给定的第二个形式 $\sum a'_{ik}dx'_idx'_k$? 也就是从这里出发, 他沿着复杂的消除法的道路来到了 $ds^2$ 的不变量 (或共变量) 的概念, 如果等价成立的话, 它必定会与相应的 $ds'^2$ 的不变量相等[1].

对此要指出: 即使是在初等 (线性) 不变量理论情形中人们也曾研究过选等价问题作出发点 (见 Aronhold 在 Crelle 62 (1863) 中的文章: 论不变量理论的基础的建立). 但是随着时间的推移人们越来越想放弃它, 不仅因为结果计算极其复杂, 而且人们不能忽视, 一般必须抓住的整个研究, 在一些特殊情况下能达到多远. 我们在前面已经提到过这一点.

3. 即使如此, Christoffel 还是通过完成了一套内容极为丰富的公式工具做到了从双线性形式:

$$G_2 = \sum a_{ik}dx_i\delta x_k \tag{23}$$

($ds^2$ 的极式) 导出了一个**四重线性共变量** (*quadrilineare Kovariante*) $G_4$, 除了差一个数值因子外, 它与我们在前面提到的、由 Lipschitz 提出的 $\Psi$ 是一致的, 而且还可以看成是 Riemann 曲率形式的极式.

4. 于是 Christoffel 就由他的 $G_4$ 通过重复应用逆步微分得到了一系列无穷多的多重线性共变量. 这样最终我们就有了微分形式的无穷系列:

$$G_2, G_4, G_5, G_6, G_7, \cdots$$

5. 接着他开创了一个定理[2], 我把它看成是他的思想的主要成果, 并且称其为**约化定理**, 因为它把两个 $ds^2$ 的等价问题借助于一个任意的代换 $x_i = \varphi_i(x'_i, \cdots, x'_n)$ 约化成一个线性不变量理论的等价问题.

事情是这样: 借助于代换 $x_i = \varphi_i$ 我们得到了微分的线性代换:

$$dx_i = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x'_1}dx'_1 + \cdots + \frac{\partial\varphi_i}{\partial x'_n}dx'_n. \tag{24}$$

因而下面这些形式:

$$G_2, G_4, G_5, \cdots \quad 与 \quad G'_2, G'_4, G'_5, \cdots$$

[1] Riemann 在他的应征论文中首先也是从等价问题出发: 何时在一 $ds^2$ 中的 $\sum a_{ik}dx_idx_k$ 能过渡到系数为常数呢? 但在他以相当复杂的方式得到了这个条件 $(ik, rs) = 0$ 之后, 他转而写道: "Ut indoles harum expressionum melius perspiciatur (为了更好地看清这个方程的意义……)" 之后, 就立即直接提出构造 $[\Omega]$ 的规则, 如我们在上面 B 部和 C 部中所讲的一样.

[2] 他不是说得这样一般的, 这样一般的说法是 Ricci 提出来的.

当理解为这些微分的形式时, 必定互相线性等价 (这时 $x_1, \cdots, x_n$ 以及 $x'_1, \cdots, x'_n$ 相当于参数). 现在假设

$$dx_i = c_{i1}dx'_1 + \cdots + c_{in}dx'_n \tag{25}$$

为一个的确能把 $G_\nu$ 变成相应的 $G'_\nu$ 的线性代换. 那么要想重建相应原来的代换:

$$x_i = \phi_i(x'_1, \cdots, x'_n), \tag{26}$$

只有当且仅当系数 $c_{ik}, c_{il}$ 满足下述可积条件时:

$$\frac{\partial c_{ik}}{\partial x'_l} = \frac{\partial c_{il}}{\partial x'_k}. \tag{27}$$

Christoffel 定理现在就是, (在我们的形式系列 $G_2, G_4, G_5, \cdots$ 的情况下) 这些条件能自动得到满足, 从而整个等价问题就转化为一线性等价问题.

上述定理, 正如我们看到的, 扩大了线性不变量理论的应用范围. 但是也许人们会把他的结果作特别简单的理解, 这是我们必须避免的. 因为已给的 $G_2$ 及 $G_4$ 是否与已给的 $G'_2$ 及 $G'_4$ —— 涉及微分 —— 等价这问题, 显然是在初等不变量理论方法能力范围之内的事.

6. 在我们进一步探讨概念性的内容之前, 我们还必须指出, Christoffel 是如何进一步应用他的定理的. 为此他引进了对各种情况的一个基本分类:

$\alpha$) 或者 $ds^2$ 能够 (如我们今天所表述的) 通过一个代换 $x_i = \varphi_i(x'_1, \cdots, x'_n)$ 的连续群变到自身.

$\beta$) 或者根本没有这样的代换或者只有离散的个数.

7. 情形 $\alpha$), 这肯定是人们最感兴趣的, 因为它包含了 $K_R = 0$ 和 $K_R = \text{const}$ 这两种情况, 可是 Christoffel 对它们没做进一步的研究. 我认为这不是他的原意, 而是后来辞职造成的结果. 他先前就已经研究了这里所讲到的 $n = 2$ 的情形[1]. 但是在 $n = 3$ 时就有了很多种可能情形在此可以讨论. 首先可能解释清楚的是, 像通过 Lie 那样创造一个连续群的一般理论. 对一给定的 $ds^2$ 只有一种具有有限个参数的群可以讨论, 而且正是这种 "有限" 群, Lie 把他的出版于 1888—1893 年的、包揽无遗的巨著奉献给了它[2]. 最后 Bianchi 在稍后把所有在 $n = 3$ 时的可能性都列举出来了[3]. 在此我们不可能进一步深入下去了.

8. Christoffel 对情形 $\beta$) 作了相当深入的讨论. 一般来说, 如果存在一个孤立的代换将 $ds^2$ 变到 $ds'^2$, 则必定已经会表现出有一系列 $G_2, G_4, G_5, \cdots$ 顺次线性等价于相关的 $G'_2, G'_4, G'_5, \cdots$. 但是各种情况下的这个系列的个数能达到的上限没有

[1] 测地三角形的一般理论, Math, Abhandlungen der Berliner Akademie (=Christoffel 全集 I 297 页及以后).

[2] 变换群理论. 三卷本, Leipzig, 1888—1893. 在 Engel 女士的合作下完成.

[3] Memoria della Società Italiana delle Scienze, ser. 3a,t. XI, 1897.

给出. 还有, Christoffel 关于通过比较两边所提出的线性不变量来证明这一等价性的言论也还是需要验证的.

---

现在我要来指出, Christoffel 约化定理与在上几节末 (187 页 (中译本 169 页) 以下) 所给出的考察有怎样的关系.

设 $ds^2$ 以这样的方式与 $ds'^2$ 等价, 使得 $x$ 的空间的点 $O$ 与 $x'$ 空间的点 $O'$ 相对应.

于是对 $O$ 点算出的 $G_2, G_4, G_5, \cdots$ 与在 $O'$ 点算出的 $G'_2, G'_4, G'_5, \cdots$, 即两列带有常系数的微分形式, 我们以适当的方式称之为

$$G_2^0, G_4^0, G_5^0, \cdots \quad 及 \quad G_2'^0, G_4'^0, G_5'^0, \cdots \tag{28}$$

线性等价. 我们来简化它们, 办法就是, 我们在两边都引入 Riemann 正规坐标 $y_1, \cdots, y_n$ 以及 $y'_1, \cdots, y'_n$. 于是 $G_2^0$ 及 $G_2'^0$, 或者更确切地说, 与它们相对应的 $ds^2$ 及 $ds'^2$, 就变成了 $\sum dy_i^2$ 和 $\sum dy_i'^2$, 并且这个线性等价 (变换) 必定是正交的 (变换) (不仅 $dy_i$ 的变换是如此, 而且因为代换的系数是常数, $y_i$ 本身的变换也是如此). 由于我们已明确指出代换是这样的, 我们从今以后就可将 $G_2^0$ 和 $G_2'^0$ 从为比较而设置的形式序列中剔除. 因而 $G_4^0, G_5^0, \cdots$ 与 $G_4'^0, G_5'^0, \cdots$ 会通过 $y_i$ 的一个正交代换而等价.

我们在前面已经知道, 除了差一个数值系数外, $G_4^0$ 相当于 Riemann 微分形式的四重线性极式:

$$\sum (ik, rs)_0 (dy_i \delta y_k - \delta y_i dy_k)(dy_r \delta y_s - \delta y_r dy_s). \tag{29}$$

一个简单的想法, 可惜我们不能在这里细讲, 进一步表明, $G_5^0, G_6^0, \cdots$ 以相同的方式 —— 除了差一个不影响比较的更低阶的项 —— 相当于:

$$\begin{aligned} &\sum (ik, rs)_1 (dy_i \delta y_k - \delta y_i dy_k)(dy_r \delta y_s - \delta y_r dy_s), \\ &\sum (ik, rs)_2 (\text{——})(\text{——}), \end{aligned} \tag{29'}$$

等等, 其中 $(ik, rs)_1, (ik, rs)_2, \cdots$ 表示 $(ik, rs)$ 按 $y_i$ 的幂级数展开的一阶项, 二阶项等等. 这样一来 Christoffel 定理就归结为, 这些逐个的表达式能够借助于一个 $y_i$ 的正交代换等价于相应的带撇的表达式, 但是这也就是说, 一般而言下述表达式:

$$\sum (ik, rs)(dy_i \delta y_k - \delta y_i dy_k)(dy_r \delta y_s - \delta y_r dy_s) \tag{30}$$

必定与以带撇的字符写出的相应表达式正交等价.

现在这个正交代换进入到这整个的结构中来只是由于对给定 $O$, 其正规坐标 $y_i$ 还只能确定到差一正交代换是未定的. 根据事情的这个实质, Christoffel 定理

结果就完全是 187 页 (中译本 169 页) 上的结论, 就是说, 规范化的 $ds^2$ 通过给的表达式 (30) 随之一起完全给定. 我们可以这样说, Christoffel 定理对任意坐标系 $(x_1, \cdots, x_n)$ 得出的结果和我们在 187 页 (中译本 169 页) 上对特定坐标系所得出的结果完全相同.

我在这里对这整个思路只能作一素描, 非常期望不久它能从其他方面得到详尽的描述. 人们可以参阅, 例如, Noether 女士在 1918 年 1 月 25 日向 Göttinger Societät (哥廷根协会) 提交的一篇注记:《任意微分形式的不变量》[1] .

## §5 用无限小变换表征不变量 (Lie)

无限小变换实质上应理解为只是一种特殊类型的变换, 是对某个参数的变分; 相对于 19 世纪头几十年的研究工作而言, 工作的新意在于它与群的概念及其不变量理论结合了起来.

人们能够将线性群的不变量通过它们对无限小变换的行为来表征, 以及不变量的线性偏微分方程的存在也是以它为基础, 早就由 Sylvester (1852) 首先指出来了. 一个简单的例子就足以将其基本思想突出出来. 考察一个二元二次型

$$f = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \tag{31}$$

(系数为常数), 我们来研究是否有 $a_{ik}$ 的一个二次齐次有理整函数存在, 它对幺模线性代换:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha x_1' + \beta x_2' \\ x_2 &= \gamma x_1' + \delta x_2' \end{aligned}\right| \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1) \tag{32}$$

为不变. 为了达到目的我们要指出 —— 我根本没有用什么技巧 —— 在代换 (32) 之下有下述无限小的代换:

$$\text{(33a)}\quad \begin{aligned} x_1 &= (1+\varepsilon)x_1', \\ x_2 &= (1-\varepsilon)x_2', \end{aligned} \qquad \text{(33b)}\quad \begin{aligned} x_1 &= x_1' + \eta x_2', \\ x_2 &= x_2', \end{aligned} \qquad \text{(33c)}\quad \begin{aligned} x_1 &= x_1', \\ x_2 &= \varsigma x_1' + x_2'. \end{aligned}$$

(由各上式通过重复和组合就可综合出最一般的 (32) 式来). 我们还可以把代换 (33) 写成:

$$\text{(34a)}\quad \begin{aligned} \delta x_1 &= -\varepsilon x_1, \\ \delta x_2 &= +\varepsilon x_2, \end{aligned} \qquad \text{(34b)}\quad \begin{aligned} \delta x_1 &= -\eta x_2, \\ \delta x_2 &= 0, \end{aligned} \qquad \text{(34c)}\quad \begin{aligned} \delta x_1 &= 0, \\ \delta x_2 &= -\varsigma x_1. \end{aligned}$$

现在头一件要紧事就是, 对应于 (33), (34) 这些式子, 给出 $f$ 的系数 $a_{ik}$ 所经过的代换[2] . 我们求得:

[1] 还可见: H. Vermeil: 二次微分形式的不变量, Math. Ann 79 (1919), 以及 H. Weyl:《空间, 时间, 物质》; 第 5 版的附录 I, Berlin 1925.

[2] 计算的时候自然总是将 $\varepsilon, \eta, \varsigma$ 的高次项忽略不计.

在情形 a)

$$f = a'_{11}x'^2_1 + 2a'_{12}x'_1x'_2 + a'_{22}x'^2_2$$
$$= a_{11}(1+2\varepsilon)x'^2_1 + 2a_{12}x'_1x'_2 + a_{22}(1-2\varepsilon)x'^2_2,$$

从而:

$$\delta a_{11} = 2\varepsilon a_{11}, \quad \delta a_{12} = 0, \quad \delta a_{22} = -2\varepsilon a_{22}. \tag{35a}$$

在情形 b) 和情形 c) 分别对应有:

$$\delta' a_{11} = 0, \quad \delta' a_{12} = \eta a_{11}, \quad \delta' a_{22} = 2\eta a_{12}, \tag{35b}$$

$$\delta'' a_{11} = 2\varsigma a_{12}, \quad \delta'' a_{12} = \varsigma a_{22}, \quad \delta'' a_{22} = 0. \tag{35c}$$

一个不变量 $J(a_{11}, a_{12}, a_{22})$ 在这一无限小的代换下所获得的增量必须等于零. 于是我们就得到了三个偏微分方程, 同时表征了 $J$ 作为不变量的特性[1]:

$$\begin{aligned} a_{11}\frac{\partial J}{\partial a_{11}} - a_{22}\frac{\partial J}{\partial a_{22}} &= 0, \\ a_{11}\frac{\partial J}{\partial a_{12}} + 2a_{12}\frac{\partial J}{\partial a_{22}} &= 0, \\ 2a_{12}\frac{\partial J}{\partial a_{11}} + a_{22}\frac{\partial J}{\partial a_{12}} &= 0. \end{aligned} \tag{36}$$

如果现在令 $J$ (为了仍留在我们最简单的例子中) 为某一下述二次项:

$$a_{11}^2, a_{11}a_{12}, a_{11}a_{22}, a_{12}^2, a_{12}a_{22}, a_{22}^2$$

的一个线性组合, 则我们立即会发现, $J$ 必定与下述表达式

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \tag{37}$$

相符合到最多只差一个数值因子.

所有高次的情形与此类似. 人们立即理解到, 这个方法的主要作用是什么: 完整地计算高次不变量没有太大的用处, 因为人们还没法子运用这样得出来的长长的式子. 不如说这个方法的力量在于它能算出某种类型的不变量的线性无关的个数.

现在来谈它的普适性方面的发展, 这是我的年轻的朋友, 挪威人 Sophus Lie (他对我的 Erlangen 纲领起了推动的作用, 关于他的工作还会在后面一章来大谈特谈)[2] 从大约 1875 年以来发表了大量的著作谈这个思想. 人们用一个任意的连续

---

[1] 见 Weitzenböck (3 页上的所引), 185 页及以后. (H.)

[2] 这一章未能完成. (H.)

群和一个属于它的无限小变换来代替群 (32) 以及生成它的无限小变换 (33), 并且随后对那样一些量来计算其相应的 "诱导" 无限小变换, 人们可以用这些量来组合不变量.

在此我们立即就选那个 $G_\infty$ 来作这个群, 一般来说这个群是我们当下要研究的, 它就是全体解析代换

$$x_i = \varphi_i(x_1', \cdots, x_n'). \tag{38}$$

它们包含了以下的:

$$\delta x_1 = f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \delta x_n = f_n(x_1, \cdots, x_n) \tag{39}$$

作为生成无限小变换, 其中 $f$ 通常为 $(x_1, \cdots, x_n)$ 解析函数, 它们在人们直接运算的区域内, 连同它们的所有的各阶微分系数多被认为是可以当做无限小的量来处理.

为了简单起见, 我们, 比如说再取 $n = 2$, 并且作为不变量构成的对象, 取一个二次微分形式

$$ds^2 = Edx_1^2 + 2Fdx_1dz_2 + Gdx_2^2, \tag{40}$$

这样我们就首先算出了导出代换, 它们相当于公式 (39) 作用于 $dx_i$, 然后是 $E, F, G$, 再然后是它们对 $x_1, x_2$ 取的一阶和二阶偏微商. 这些代换相当麻烦, 因为在 (39) 式中出现的不仅有 $f_i$ 本身, 还有它们的一阶和二阶的微商. 于是借助于它们人们就可以例如证实, Gauß 全曲率在我们的 $G_\infty$ 的作用下的确是 (40) 式的一个不变量. 如果我们想对 Beltrami 微分参数等证明类似的结果, 我们就必须对预先给定的任意函数 $F(x_1, \cdots, x_n)$ 的偏微商求出其导出代换. 这就是 Lie 的学生波兰籍的 Zorawski 所完成的工作.

如果人们把他的计算只是看成对已知结果检验, 那么人们就不大可能会赋予它多大的价值. 但是它的意义的确更深远, 因为它证明了, 在当前的情况下, 除了所讲的那个不变量之外, 根本不可能有别的不变量. 在 $n$ 的值较大时自然有很多不变量. 对其进行计数这方面为 Lie 的另一个学生, 美国人 Haskins 解决了; 见 Transactions of the American Mathematcal Society, 第 III 卷, 1902.

我不打算深入到细节上去. 但是我可是想在下一节再用一个例子表明, 这个想法与变分法的积分方法相结合是如何地可能有用. Lie 学派总是避开这一结合, 这是它的一个不足之处.

## §6 关于一任意张量 $t_{ik}$ 的向量散度

因为我的下一个目标是, 阐述在这里所发展的理论对现代物理的意义[1], 我选

[1] 见编者前言. (H.)

在第二章中与物理的研究紧密相连的那个例子. 我们在那里一开始设 $n=4$, 并且以最简单的方式定义弧元为:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \tag{41}$$

(从而同步量与逆步量的区别就不再存在了). 这时如果 $t_{ik}$ 是一个对称张量 (或者向我们那时候讲的, 一个十维张量), 那么我们就可以从它导出一个相应的向量, 我们把它称之为*向量散度*. 它的分量就简单地是

$$\sum \frac{\partial t_{1k}}{\partial x_k}, \cdots, \sum \frac{\partial t_{4k}}{\partial x_k} \tag{42}$$

(见 84 页 (中译本 76 页) 及在 101 页 (中译本 92 页及以下) 对它的物理意义的诠释). 现在的任务就是把这个发展按它的意义推广到任意的 $ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k$ (含 $n$ 个变量) 上去.

因此我们再假设给定一个对称张量 $t_{ik}$ (这里我们之所以记为 "逆步的", 就是为了表示它的分量会像 $a_{ik}$ 一样变换).

除了 $a_{ik}$ 之外我们同时再引进它的共轭形式的系数 $a^{ik}$. 于是 $\sum t_{ik} a^{ik}$, 或者, 如果我们限于 $a^{ik}$ 的无限小的值, 这我们称之为 $\delta a^{ik}$, 则

$$\sum t_{ik} \delta a^{ik} \tag{43}$$

为一不变量, 自然展布在某一区域上的积分

$$\int \left(\sum t_{ik} \delta a^{ik}\right) (\sqrt{a} dx_1, \cdots, dx_n) \tag{44}$$

也同样是一个不变量. 现在我们特地来计算通过一无限小变换

$$x_r = x'_r + f^r(x_1, \cdots, x_n) \tag{45}$$

所诱导出的 $\delta a^{ik}$ 的值.

为此我们必须首先记住, 在 $x$ 的任意变换下, $a^{ik}$ 表现为与积 $dx_i dx_k$ 同步. 另一方面我们从一开始就要略去无限小 $f^r$ 的高次项. 于是通过不长的中间计算我们就得到:

$$a^{ik'}(x'_1, \cdots, x'_n) = a^{ik}(x_1, \cdots, x_n) - \sum_r a^{ir} f_r^k - \sum_r a^{kr} f_r^i, \tag{46}$$

其中我们已经令

$$\frac{\partial f^k}{\partial x_r} = f_r^k.$$

但是我们要把

$$a^{ik'}(x'_1, \cdots, x'_n)$$

换成

$$a^{ik'}(x_1,\cdots,x_n)-\sum_r\frac{\partial a^{ik'}}{\partial x_r}f^{r}\text{[1]}.$$

这样一来就得到:

$$\delta a^{ik}=a^{ik'}(x_1,\cdots,x_n)-a^{ik}(x_1,\cdots,x_n)=\sum_r\left(\frac{\partial a^{ik}}{\partial x_r}f^r-a^{ir}f_r^k-a^{kr}f_r^i\right).\quad(47)$$

把这个 $\delta a^{ik}$ 的值代入积分 (44) 中. 这样我们就得到下式作为新的积分变量:

$$\int\left(\sum_{i,k,r}t_{ik}\left(\frac{\partial a^{ik}}{\partial x_r}f^r-a^{ir}f_r^k-a^{kr}f_r^i\right)\right)(\sqrt{a}dx_1\cdots dx_n).\quad(48)$$

在此我们以众所周知的方式通过分部积分将 $f_r^k, f_r^i$ 加以改造, 这样做的时候还同时假设, 通常为实值的向量 $f^r$ 在积分边界上等于零. 这样再除以 2 之后我们就得到下式作为不变量:

$$\frac{\int\left(\sum_r f^r\left\{\sum_{i,k}\frac{\partial(\sqrt{a}t_{ir}a^{ik})}{\partial x_k}+\frac{1}{2}\sqrt{a}\sum_{i,k}t_{ik}\frac{\partial a^{ik}}{\partial x_r}\right\}\right)}{\sqrt{a}}(\sqrt{a}dx_1\cdots dx_n),\quad(49)$$

但是 $f^r$ 是一个完全任意的同步向量. 我们得到结论, 即下述表达式:

$$\frac{\sum_{i,k}\frac{\partial(\sqrt{a}t_{ir}a^{ik})}{\partial x_k}+\frac{1}{2}\sqrt{a}\sum_{i,k}t_{ik}\frac{\partial a^{ik}}{\partial x_r}}{\sqrt{a}}\quad(50)$$

对 $r=1,2,3,4$ 定义一个逆步向量, 我们正好把它称为 $t_{ik}$ 的向量散度.

实际上当 $a^{ik}$ 为常数时它就归结为

$$\sum_{i,k}\left(a^{ik}\frac{\partial t_{ir}}{\partial x_k}\right)$$

而特别当所有的 $a^{ii}=1$, 而其余的 $a^{ik}=0$ 时, 就归结为

$$\sum_k\frac{\partial t_{kr}}{\partial x_k},$$

即归结为 (42) 式的量. 这就是说, 只要我们对原来的 $x$ 用它的任意函数作为新的 $x$ 引进来, 并且将由此从 $\sum dx_i^2$ 生成的新的 $ds^2$ 记成 $\sum a_{ik}dx_idx_k$. 当然我们由此

[1] 这里原文第二项求和号的下标原来为 $k$, 疑有误. —— 中译者注

得到的不是那个最一般的 $ds^2$, 而只是 Riemann 曲率为零时的 $ds^2$. 今后对任意给定的 $ds^2$ 我们总都是把向量 (50) 看成是张量 $t_{ik}$ 的向量散度, 这是一个有一定意义的约定. 因为我们要做的计算太初等, 不论什么情况令 Riemann 全曲率为零也不会带来什么简化. —— 它和 Beltrami 在将第一微分参数和第二微分参数的概念推广到任意 $ds^2$ 时所采用的类比的方法完全是一样的 —— 或者最后尤其是 Riemann 本人在他把一任意的 $ds^2$ 放在为奠定 $n$ 维空间几何基础的首要地位时所采用过的那一方法.

# 结 束 语

当我们在这里结束第三章的讲述之际, 我们不能不强调指出, 尽管我们作了很大的努力, 在我们的讲述中仍然只讲到了当前发展中的文献的一小部分, 无论是在纯粹分析方面, 还是在解析几何方面, 抑或是在分析力学方面. 但是我们的描述也许还是有一些用, 因为我们把某些思想形成放到了首位, 它们通常在今后说不定在什么时候会发挥作用.

# 第三章注释

1. 现代 $n$ 维微分几何已经超越了 Klein 撰写本章时所见到的状态, 有两方面的重要进展.

I. 新出现的 "*无限小平行移动* (*Infinitesimale Parallelverschiebung*)" 深化了测地线的理论和 Gauß 全曲率的理论, 并且澄清了 "三指标符号" 的意义.

II. 通过 Ricci *演算* (*Ricci-Kalkül*) 使得问题的计算部分如此显而易见, 以致一些本质的几何问题不再会被形式类型的困难所掩盖; 而这在过去可不一样.

对现代微分几何最快捷的导引见于 *A. S. Eddington 的著作:《相对论的数学理论》*(德译本, Berlin 1925) 的第二章.

更多的著作有下述对此论题的更深入的著述:

*H. Weyl: Raum, Zeit, Materie* (空间, 时间, 物质), Berlin 第三版 1919, 第五版 1925.

*T. Levi-civita: Lezioni di calcolo differenziale assoluto* (*绝对微分学讲义*), Rom 1925.

有关所有这些工作的一个详细的总结报告见 D. J. Struik: 高维微分几何, Berlin 1922.

Klein 对这个领域的处理方式就是到今天也没有失去它的价值. 他为现代微分几何清理了它赖以矗立的地基. 有谁在其中已经成长起来了, 就有忘记那个基础的

危险而还要去做 “进一步的计算”. 这里就是要对此作斗争.

受到 Klein 偏爱的不变量理论的表述与决定着另一种表述的张量概念之间的关系, 就好像方程

$$bx = a$$

与

$$x = \frac{a}{b}$$

之间的关系.

人们只有用第二个式子才能计算得快. 但在决定性的地方人们还必须回到第一个方程上去.

2. 159 页 (中译本 144 页): 见第一章注释 4.

3. 171 页 (中译本 155 页): 显然人们可以把微分不变量理解为场中的可以移到一起的两个或多个点上的同时不变量 (Simultaninvarianten) 的极限情形.

4. 172–174 页 (中译本 156–157 页): 人们可以特别将 §4, §5 与 Eddington 的表述 (上述注释 1) 相比较; 读者可在那里不需要别的引导就可以认识到在 Klein 的报告之后所做的现代研究.

5. 182 页 (中译本 165 页): 公式 (19) 给出了这样的可能性: 从 Riemann 正规坐标系, 它只能确定到差一个正交代换, 来选一不变量: 人们这样来选该坐标系, 使得二次型 $\sum K_{ik}^{(n)} dx_i dx_k$ 变换到主轴, 即不含混合项. 这总是可能的, 而且在该型的本值各异时, 甚至只有一种方式.

# 附录 I

# 对新近以来几何学研究的比较考察

Dr. Felix Klein

Erlangen 大学国聘数学正教授

## 为进入 Erlangen k. Friedrich-Alexanders 大学哲学系和教授评议会所作的报告提纲[1]

几何学领域在最近五十年来所取得的成就中, 射影几何的建成占据着首位. 如果说, 在开始的时候, 所谓的度量关系, 由于它们在射影的作用下不是保持不变的, 还显得好像处理不了, 那么在新近的时期内, 人们也已经学会了从射影的观点来理解它们了, 从而现在射影的方法覆盖了整个几何学. 只不过度量性质已不再是作为空间实体 (räumlichen Dingen) 本身的性质出现, 而是作为这些实体对一个基本 - 形体 (Fundamental-Gebilde), 即无穷远处的球面圆 (Kugelkreise, 亦译成虚圆. ——中译者注) 的关系出现[2] .

如果把普通的 (初等的) 几何中的诸概念与这样逐渐积累起来的对空间实体的理解相比较, 那么就会引起人们想去寻求一个普遍原理的问题, 根据这个原理可以把这两种方法都建立起来. 考虑到除了初等几何学和射影几何学之外, 还有一系列其他的方法, 尽管发展得还不够, 人们也必须给以同样地独立存在的权利, 这个方法就显得如此更加重要了. 属于这一类的几何学有, 径向反演几何学 (Geometrie der reciproken Radien), 有理变换几何学 (Geometrie der rationalen Umformungen), 等等, 这些我们在下面都将提及并加以阐述.

如果我们接着就来着手建立这样一种原理, 我们真的并没有开创出什么真正新思维, 而只是把许多人或多或少地肯定思考过的东西以清晰而确切的方式归拢到一

[1] [我在 1893 年把 Erlangen Programm 刊登在 Math. Annalen 的第 43 卷上, 同时附加了一系列的注释, 这些注释后来我多次引用而未加改变. 它们不同于原有的注释, 现在来把它们放到方括号中, 为的只是以便识别它们都是在 1893 年补加的. K.]

[2] 见附注 I.

起. 可是由于几何学近年来取得了飞速的发展, 尽管就其主题而言是一致的, 已经被分割成一系列几乎相互隔绝的分支[1], 并且在相当大的程度上互不相关地继续成长着, 发表这样一种综观全局性的研究, 就显得更加有理由了. 但是同时我还面临着一种特别的期望, 要我讲述一下由 Lie 和我在最近的工作中所展开的方法和观点. 我们在这两方面的工作, 尽管所涉及的对象如此不同, 但是切入这里所讲的普遍见解 (allgemeine Auffassungsweise, 即指前面提到的要寻求的普遍原理 —— 中译者注) 这一点上却是一致的, 因而, 再次讨论这些工作并从它们按其内容和倾向来刻画相关的工作, 就是一件有必要的事了.

如果说, 我们至今还只谈到了几何学的研究, 那么这种研究就应理解为包括了任意延伸的 (beliebig ausgedehnte, 即任意维的, 以后有时将译成 "维" —— 中译者注) 流形在内, 这种任意维的流形是在舍弃了那些对纯粹数学研究来讲并非本质的空间图形[2] 之下, 从几何学中抽象出来的[3]. 在这种对流形的研究中所包含的流形的种类和在几何学中所包含的同样多, 而且还要和在几何学中一样, 要把彼此独立进行的研究中的种种共同点和不同点突出出来. 对抽象的研究来讲, 在下文中只需直接谈多维流形就足够了; 但是如果联系着我们较熟悉的空间概念来讲, 我们的论述就会变得更简单和更易懂. 当我们从几何实体的考察出发, 并把它们作为简单的例子来展开我们对普遍思想的论述的时候, 我们就是沿着科学在它自己成长的过程中所走过的道路前进, 而把这作为我们讲述的基础通常也是最有利的.

在此预先展示一下下面要讲的内容根本不可能, 因为这些几乎不可能被纳入到一个更精简形式[4] 中去; 各节的标题就已经会给出我们的思想的进展的一个概貌. 在结尾的地方我附加了一系列注释, 在其中我或是对一些看来有益于正文中一般阐述的特殊点作了进一步的展开论述, 或是我会尽量将适应于正文中所考察的内容的抽象的数学观点与其相近的观点划清界限.

## §1 空间变换群, 主群, 一个一般问题的提出

在下面的叙述中所需要的一个最重要的概念, 就是空间变换群的概念.

任意多个空间变换[5] 组合起来给出的总又是一个空间变换. 如果给定的一系列变换具有这样的性质, 使得由属于它的变换所组合而成的每一个变换又属于它自

[1] 见附注 II.

[2] 见附注 III.

[3] 见附注 IV.

[4] 这种对下面要给出的表述的精简形式, 正如我所担心的, 会大大增加理解的难度. 但是要想解决这一点只有通过非常深入的讲述才能达到, 在其中要对我们在这里只是触及了的个别 - 理论 (Einzel-Theorien) 作详细的讲解.

[5] 我们所设想的变换总是作用在全部空间形体上的, 因此我们就直接说空间的变换. 这种变换可以是, 引进其他种类的元素来代替点, 例如, 像对偶变换那样; 在正文中不会对这种情况加以区别.

己, 那么这个变换系列称之为*变换群* (Transformationsgruppe)[1].

全体位移* (每一位移都看成是对整个空间实行的一个操作) 构成变换群的一个例子. 比如说绕一点的转动位移[2] 就构成一个包含于其中的群. 一个群, 如果它反过来包含了运动群, 就可以用直射变换的全体来表示. 相反全体对偶变换不构成群 —— 因为两个对偶变换结合起来得出的又是一个直射变换 —— 不过如果人们把全体对偶变换和全体直射变换结合到一起, 则又会生成一个群[3].

存在这样的空间变换, 它们根本不会改变空间形体的几何性质. 几何性质, 按照这个概念的本意, 是应该与所研究的形体在空间所取的位置, 它的绝对大小, 最后, 还应与它的各个部分的排序的指向 (Sinn) 均无关[4]. 因此一空间形体的性质历经所有的空间移动, 它们的相似变换, 镜像过程, 以及所有由这些变换结合而成的变换的作用, 均不会改变. 我们把所有这些变换的总体称之为空间变换的*主群* (Hauptgruppe)[5]; *几何性质在主群的变换之下将保持不变*. 反过来人们也可以说: *几何性质由它们对主群变换的不变性来表征*. 显然如果我们把空间看成在瞬间是不能动的, 诸如此类, 看成是一个刚性的流形, 那么每一个图形就都有各自身独立的意义; 在它的诸多性质中, 只有那些在主群下保持不变的真正的几何性质才是它作为独特个体存在的依据. 这个在此表述得还不够确切的思想在进一步的论述中将显得越来越清楚.

如果我们现在把在数学上意义不重要的图像甩掉, 那么我们在空间中看到的就仅仅是一个多重延伸的 (mehrfach ausgedehnte—— 用现在的术语就是 "多维的" —— 中译者注) 流形, 因此当我们坚守以我们习惯了的点的概念作空间元素时, 我们看到的就是一三重延伸的流形. 我们也可以与空间变换类似地来谈流形的变换; 它们也构成群. 只不过这个群已不再是以其意义突出于其他群之上的一个群了; 每一个群与任意其他的群都是平等的. 于是, 作为对几何的推广就有了下面这个概括

---

[1] 这个概念和名称一样, 是从代换理论 (Substitutionstheorie) 中取来的, 只不过是在那里, 一个连续区域的变换由一有限个离散量的重排 (Vertauschung) 所代替. [这个定义还可以加以完善. 就是说在正文中所讲的群默认了, 对它所可能包含的每一个运算, 也必包含了它的逆运算; 但是正如大约是 Lie 首先提出的, 在运算数目为无限时, 这绝不是这种群概念的推论; 因此在正文中所给群的概念的定义中要明确假设加进了这一点. (1893)]

* 这里原文为 Bewegungen, 原意是各种各样的运动. 运动是位移随时间的改变, 由于有运动的叠加原理, 全体位移构成群, 全体运动也构成群, 有时这二者都叫做 "运动群". 但这二者不仅在概念上是不同的, 而且在性质上也有差异. 例如绕一点的转动运动群和绕一点的转动位移群性质上就不一样. 由于有限转动位移的结合顺序是不可交换的, 所以后者是非 Abel 群. 还有要注意, 某一个运动中不同时刻的位移全体并不构成群. —— 中译者注.

[2] Camille Jordan 构建了包含在运动群中的所有的群: Sur les groupes de mouvements (论运动群). Annali di Matematica, 第二卷.

[3] 此外一个群的变换, 正如在正文中将讲到的群虽然常常是这样, 根本用不着以连续并排的方式存在. 例如, 一系列有限个能使一个规则的物体自我覆盖的位移就构成一个群, 又如将一条正弦曲线作一系列无限多次, 但是离散的无限多次的叠加也构成一个群.

[4] 这里所谓的指向我是指排序的情况, 一图形区别于其对称图形 (其镜像形体) 就是以此为基础的. 因此, 例如, 一条右螺旋线与一条左螺旋线就是根据它们的指向来区分的.

[5] 这些变换构成群这一点在概念上是必然的.

性的问题:

*给了一个流形以及在其中的一个变换群; 要求人们来研究有关属于这个流形的几何形体的那样一些性质, 它们在这个群的变换下保持不变.*

根据现代的表达方式, 自然人们在这里习惯于只对一个确定群, 所有线性变换的群来采用这种表述, 人们可以这样说:

*给了一个流形以及在其中的一个变换群. 要求建立相对于这个群的不变量理论*[1].

这就是那个一般性的问题, 它不仅包括了普通的几何, 而且还特别地包括了在此讲到的新近的几何方法和对任意延伸的流形的各种处理方式. 要特别强调的是, 在有关伴随变换群的选择上还存在任意性, 以及所有满足一般要求的研究方式拥有由此而来的、在这个意义上是相同的权利.

## §2 一个接着包含着另一个的一组变换群是依次伴随的. 几何学研究的各种类型及其相互关系

因为空间实体的几何性质经受所有的主群变换之后保持不变, 所以要问有哪些性质只对这种变换的一部分保持不变的问题就是毫无意义的. 如果我们要探讨空间形体与设想为固定的元素之间的关系, 那么这样的提问相反倒是有意义的, 尽管也还只是形式的. 例如, 像在球面三角学中那样, 我们在挑出了一个确定的点的条件下来考察空间实体. 这样一来首先就要求: 我们要求出的在相伴随的主群下的不变性质就不再是空间实体本身的性质, 而是它们与给定点共同构成的系统的性质. 但是这个要求我们可以用另一种形式给出: 要求人们来研究有关空间形体的这样一些性质, 它们在主群中的维持该点固定不动的那一部分变换下保持不变. 换言之: 或者我们在空间形体上加上所给的这个点, 在主群的意义下来研究它, 或者用主群中保持该点不变的那部分 (子) 群代替主群来研究它, 这二者是一样的.

这个就是在下面要经常用到的原理, 因此我们打算在此对它作一般的表述; 比方说以下述形式:

设已给一流形, 为了对它进行处理, 再给出一个有关于它的变换群. 我们提出这样的问题, 相关于一给定的形体来研究包含在这个流形之内的几何形体. 于是人们可以, *或者把这个给定的形体加入到该形体系中去, 然后在所给定的群的意义下来叩问这个扩大后的系统的性质 —— 或者, 也可以不去扩大这个形体系统, 而是*

[1] [这个术语在此及在以下都绝不会直接让我们想起有关任意给定形式的常常是整有理的不变量以及在它们之间存在的整有理的合系 (Syzygien) 的问题. 这个问题, 根据我和 Clebsch (他先在 1871 年出版了他的二元形式的理论) 间的交流我当然是完全熟悉的. 尽管如此我感到和它绝没有什么关系. 我把一个群的不变量理论直接理解为对任一给定的形体在群的作用下保持不变的关系的学说. 人们也可比较我在本文集的第 18 章论非欧几何的第二篇论文的 §5 中所作的明确的说明. 整个平面三角学和球面三角学就是属于初等几何的不变量理论的例子, 这肯定还没有穷尽所说的模式. K.]

*把作为处理基础的变换限制到包含在给定群中的、不改变给定形体的那些变换 (而且它们必定又构成一个群).*

有别于我们在本节开始所提出的问题, 我们现在来研究其逆问题, 这个问题从一开始就很好理解. 我们要寻问的是空间实体的这样一些性质, 它们在一个包含了主群作为其一部分的变换群的作用下保持不变. 我们在这样一种研究下所寻找到的每一种性质都是实体本身的性质 (Eigenschaft des Ding's an sich), 但是反过来则不一定. 在这种相反的情况下其实我们前面讲到的原理正好能起作用, 在这里主群现在则是那个较小的群了. 这样我们有:

*如果用一个包括主群在内的群来代替主群, 那么只留下一部分几何性质能保持不变. 其余的则不再表现为空间实体本身的性质, 而是表现为一个系统的性质, 这个系统是由原来的实体加入一个特选的形体而得出的. 这个特选的形体是 (一般来说只要它是确定的[1]) 这样来规定的, 在所给群的变换里面能使它保持它固定不动的只能是那些也是主群中的变换.*

这里要讲到的几何学的新方向以及它与初等方法之间的关系就是以这个定理为基础的. 它们的特征就在于, 用一个扩大了的空间变换群来代替主群作为研究的基础. 它们之间的相互关系, 只要它们的群包括在内, 由一个相应的定理来确定. 对于我们在此将要考察的多维流形的各种处理方式这个定理也适用. 现在我们要在

[1] 例如人们可以这样来生成这种形体, 办法就是选一个任意的起始元素, 只要求所给群中没有一个变换能把它变到自身, 然后将主群作用到它上面去. [正文中的这个定理无疑是我的纲领所有思考的中心, 与此相应地许多新近的作者给它加上了 "伴随定理" 这个特殊名称. 但是这会在上一注释提示的意义下常常被误解. 当人们脑子里只想到有理整不变量或合系 (Syzygien) 的时候, 人们说这个定理纯粹是猜测, 或者也会构造出一些未经检验的情形, 以错误的方式来解释, 就看不出它是真的. 人们在这个定理中所寻求的大大超过它所意谓的. 我的意思准确地说就是 Cayley 1859 年在第六次代数形式会议文集 (Phil.Trans. 1859, 论文集, 第 II 卷, 560 页 —— 特别是结束语 592 页) 上对射影几何以及初等度量几何的特殊情形所阐述过的, 此外 Laguerre 也已于 1853 年将在上述文集的 242–243 页上发表过这一定理的一个更为特殊的形式. Cayley 在他的论文的结尾铭刻印下了这样一句话: "Metrical geometry is a part of descriptive geometry and descriptive geometry is all geometry and reciprocally (度量几何是画法几何的一部分, 而画法几何就是全部几何, 反之亦然)". 我要在这里用我自己的方式来表述它, 这种表述以其平铺直叙的方式能排除任何误解: 只要人们接受在直接选取的坐标中对球圆的表述, 初等几何的每一个结论就都可以通过四面体坐标间的关系来描述.

也许最好再补上下面的话: 球面圆与一任意的不可分解的圆锥曲线成射影关系, 从而可以这样来选择坐标系, 使得它的平面能够通过令一行列式不为零的三元二次形式等于零来描述. 现在我们可以比如, 作为例子, 取位于无穷远平面中的带尖点的 $C_3$ 来代替它 (它是一 W-曲线, 即在一带有一个参数的直射的连续群下保持不变的曲线). 无穷远平面上的所有点在 $G_4$ 下保持不变, 它由下式给出:

$$x' = \lambda x + a, \quad y' = \lambda y + b, \quad z' = \lambda z + c.$$

现在如果我们把 $C_3$ 只作为一个整体保持不变, 那么我们就会有一个由直射组成的 $G_5$, 并能设想设计一个属于它的几何. 如果人们随后将此几何纳入一般的射影几何, 那么人们自然不会与一位于无穷远平面中的任一 $C_3$ 相伴随 (好像它是通过令一般的三元三次形式为零来给出的). 相反人们应该立即这样专门来引进所说的形式, 使得令它等于零同样表示一条带尖点的 $C_3$. 但是最后这个条件也能满足, 因为所有带尖点的 $C_3$ 互相都是射影类似的. 而且在所有人们能想象到的进一步的情形也是这样类似的. K.]

个别的方法上来证明这一点, 因为在这里那些在本节和前面几节中一般地建立起来的定理会在具体的对象上找到它们的说明.

## §3 射影几何

那种不直接属于主群的空间变换, 每一个都可以用来将已知形体的性质转移到新的形体上去. 我们把曲面投影到平面上, 从而将平面几何应用于曲面几何, 所作的就是这样; 所以早在一个真正的射影几何产生之前, 人们就已经通过将给定的图形投影到另一个图形上, 从而从后者的性质得出有关给定图形性质的结论来. 但是只有当人们已经习惯于将原来的图形认为与所有由它的投影所导出的图形在本质上是一致的, 并且由投影转移而得到的性质, 这样来说吧, 明显地与由投影相联系着的变换无关时, 射影几何才修成正果. 这样一来, 这种处理在 §1 的意义下就是以*所有的射影变换的群为基础并且由此造成了射影几何与普通几何之间的对立*.

对每一种空间变换都可以设想有一种类似于像我们在这里所讲的发展进程; 我们还会经常回到这上面来. 在射影几何的范围内, 这种发展进程向两方面进展. 一方面是通过在作为基础的变换的群中加入对偶变换而发生的观念上的进一步发展. 从今天观点来讲, 两个相互对偶着的对立的图形, 已经不再是被看成两个不同的, 而是被看成在本质上是同一个的图形. 另一个步骤就在于通过加入有关的虚变换来扩大作为基础的直射变换和对偶变换群. 这一步要求人们事先通过加入虚元素来扩大固有的空间元素 —— 完全相当于在作为基础的群中加入对偶变换就同时会导致引入点与平面 (这里平面英译写成直线 —— 中译者注) 作为空间元素一样. 只靠引入虚元素就可以达到将空间理论与那已是受人们看重的代数运算的领域准确地对接起来, 这里不是我们来表明引入虚元素能带来这种方便的地方. 相反要强调指出, 把虚数引入的理由在于代数运算的研究, 而并不在于射影变换和对偶变换群. 正如同在后者我们也可以只限于实的变换, 因为实的直射变换和对偶变换就已经构成群了, —— 当我们并不立足于射影的观点时也一样可以引入虚的空间元素, 而且只要我们原则上是研究代数形体, 就应该如此.

人们怎样从射影的观点来理解度量性质, 是按照上一节一般定理来确定的. 度量性质要看成对一个基本形体 —— 在无穷远的球面圆[1] —— 的投影关系, 这个基本形体具有这样的性质, 它只能在射影群的变换中那些也属于主群的变换下才能保持不变. 对这个如此直白的定理还需要做一个重要的补充, 它相当于把普通的直观方式限制到实的空间元素 (和实的变换). 为了使这个观点合理合法, 我们还要把球面圆明显地加入到实空间元素系统内; 在初等几何意义下的性质在射影的观点下,

[1] 这一观点应该说是法兰西学派 (在其最早的文本中说的是 Chasles —— 中译者注) 的最漂亮的成果之一; 将性质划分为位置的性质和度量性质, 正如人们喜欢在射影几何的一开始就提出的这种划分, 只有通过它才获得了精确地含义.

要么是这个实体本身的性质, 要么是对这个实的元素系统的关系, 或者是对球面圆的关系, 或者是这二者.

在这里我们还可以想起那种类型, 正如 v. Staudt 在他的位置几何 (Geometrie der Lage) 中建立的射影几何那种 —— 即那种类型的射影几何, 它只限于用所有的实射影—对偶变换的群作其基础群[1].

大家都知道, 他是怎样从普通的直观材料中只提取出这样一些特征, 它们在射影变换下能保持不变. 如果我们还想由此进一步过渡到考察度量性质的话, 那么我们就要直接将后者作为对球面圆的关系引进来. 这个如此完善了的思路对于当下的考察而言具有重要的意义, 因为这使得我们有可能为每一种在尚待引入方法的意义下的几何学建造相应的结构.

## §4 通过映射产生的转移 (Uebertragung durch Abbildung)

在我们进入讲述那些与初等几何和射影几何比肩而立的几何方法之前, 让我们来一般地申论一下那些在下面会总是出现的几个研究结果, 并且我们至今所提到的实体已经为它们提供了足够多的例子. 本节和下一节就是涉及这方面的论述.

设我们有一流形 $A$ 要在以群 $B$ 为基础下对它进行研究. 于是如果我们通过某一变换将它变成另一流形 $A'$, 那么将 $A$ 变到自身的变换群 $B$ 此后就会变成一个将 $A'$ 变到自身的变换群 $B'$. 这样一来, *由以 $B$ 为基础来研究 $A$ 的处理方式*就会*得出一个以 $B'$ 为基础来研究 $A'$ 的处理方式*, 也就是说, 包含在 $A$ 中的形体所具有的每一个相对于群 $B$ 的性质, 会给出包含在 $A'$ 相应的形体一个相对于群 $B'$ 的性质, 这是一个不言而喻的原理.

例如, 设 $A$ 为一条直线, $B$ 为将 $A$ 变到自身的三重无限多的线性变换. 于是对 $A$ 的处理方式正就是那在新代数学中称之为二次型的理论. 现在人们可以通过在平面上的一个点出发的投影将这条直线与该平面上的一条圆锥曲线 $A'$ 对应起来. 于是容易证明, 由直线到自身的线性变换就可与圆锥曲线到自身的线性变换, 即圆锥曲线的那种变换, 它们随同该平面的线性变换一起将圆锥曲线变到自身的, 联系起来.

但是现在根据 §2 的原理[2] 有: 或者人们把圆锥曲线本身看出是固定的, 仅在那些能把这条圆锥曲线变到自身的平面的线性变换下来研究它, 或者也可以这样来研究圆锥曲线上的几何, 这就是人们研究平面的全部线性变换而让圆锥曲线随着一起改变, 这二者是一样的. 这样一来我们在圆锥曲线的点系上所了解到的性质, 在通常的意义下都是射影性质. 因此把后面这个思考和在前面得出的结果联系起来

[1] v. Staudt 是在 "Beiträgen zur Geometrie der Lage (论位置几何学)" (1856) 中才第一次以扩充了的圆, 从而也包括了虚变换的群, 作为基础.

[2] 不过这个原理在此是在稍加扩展了的形式下被应用的.

就有:

*二元形式理论和在圆锥曲线上的点系的射影几何是等价的, 也就是说, 每一个有关二元形式的定理都有关于这种点系的定理与之对应, 反之亦然*[1].

另一个适宜于直观表述这种研究的例子如下: 设我们有一二次曲面, 通过球极平面投影与一平面相联系, 则在此曲面上会出现一个基本点: 投影中心, 在平面上就有两个点: 通过投影中心的母线上的两交点的像. 我们可以立即证明: 在平面的线性变换中那些不改变这两个基本点的线性变换, 通过映射变成了把二次曲面变到自身的线性变换, 但是只是那种不改变投影点的那些. 这里所谓的把曲面变到自身的线性变换是指那种变换, 当人们实施线性的空间变换时, 这时曲面所经过的变换结果是把自己覆盖起来. 因而由此可知, 在以两个点为基础对平面做射影研究和在以一个点为基础对二次曲面做射影研究, 这二者是一致的. 可是在第一种情况下 —— 只要在研究中用了虚元素 —— 它不是别的, 只不过是在初等几何的意义下来研究平面. 因为平面变换的主群正好是由那些不改变点偶 (Punktepaar)(无穷远圆点 (Kreispunkte)) 的线性变换所组成. 因而我们最后得:

*平面的初等几何和一二次曲面在取其一点作基本点之下的射影研究是一回事.*

这样的例子可以随意成倍地增加[2]; 这里选讲这两个例子, 是因为我们在下面还有机会再回到它们上面来.

## §5 关于空间元素选择的任意性 Hesse 转移原理 (übertragungsprinzip). 线几何

作为直线, 平面, 空间, 以及一般来说作为待研究的流形的元素, 可以取流形中所包含的每一种形体: 点组, 或许是一条曲线, 一片曲面, 等等来取代点[3]. 因为事先根本就没有规定这种形体所依赖的参数的个数, 看来根据元素选择之不同, 直线, 平面, 空间等等会受到其维数为任意多的缠扰. *但是只要取作几何研究基础的是同一个变换群, 几何的内容就不会改变*, 就是说, 在空间元素的某种选择下所得出的定理, 在空间元素作任意其他的选择时也还是定理, 只不过是这些定理的排序和关联发生了改变.

因此重要的是变换群; 我们赋予一个流形的维数则显得似乎是第二位的.

[1] 我们可以在平面上用一三阶空间曲线代替圆锥曲线也会得到相同的结果, 一般来说, 对 $n$ 维的情形也照此办理.

[2] 至于其他的可应用上述结论的例子, 以及特别是推广到高维的例子, 我推荐读者去参阅在我的一篇文章: 论线几何与度量几何 (Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie), Math. Annalen, 第 V 卷, 2, 中所作的有关论述, 还可参阅马上就会提到的 Lie 的著作.

[3] 见附注 III.

这一说明与上一节的原理结合起来就给出了一系列漂亮的应用，其中几个要在这里展开来讲一下，因为这些例子比那些冗长的解说更适于阐述一般研究的意义.

根据上一节，直线上的射影几何 (二元形式的理论) 和圆锥曲线上的射影几何意义是一样的. 在后者上现在我们可以用点偶代替点来当做元素看待. 但是圆锥曲线上的点偶的集合可以映射到平面上的直线的集合上去，办法就是令每一直线与该直线和圆锥曲线相交得出的点偶相对应. 在这一映射下，将圆锥曲线变到自身的线性变换就变为 (看成是由直线组成的) 平面上的保持圆锥曲线不变的线性变换. 但是不管我们是研究由后面所讲的这种变换形成群，还是以平面的线性变换集合为基础，并对要研究的平面上的形体附加上圆锥曲线，这二者根据 §2 是等价的. 把所有这些归纳到一起我们就得到:

*二元形式的理论与以一条圆锥曲线为基础的之下的平面射影几何是等价的.*

最后，既然在以一条圆锥曲线为基础的平面的射影几何，由于它的群与人们可以在平面上以一条圆锥曲线为基础建立的射影度量几何的群相同，这二者是一致的[1]，所有我们也可以这样说:

*二元形式理论与平面上的一般射影度量几何是同一种几何.*

我们也可以在上面的研究中用空间中的三次曲线等等来代替平面上的圆锥曲线，不过这一工作可能尚未完成. 这里所讲的平面几何之间的关系，以及更进一步空间的或任意维流形的几何之间的关系，基本上与 Hesse 所提出的转移原理 (Uebertragungsprincipe) (Borchardt's Journal 卷 66) 是一致的.

空间射影几何学，或者换个说法，四元形式理论，提供了一个完全类似的例子. 取直线作空间元素，并且如同在线几何中做过的那样，赋予它六个齐次坐标，在它们之间有一个二次的条件方程，所以空间的线性和对偶的变换显得好像是六个看成独立的变量的那种线性变换，它们把条件方程变到自己. 正如我们在上面所论述的那样，通过一连串类似的思考人们就由此得到了下面的定理:

*四元形式的理论与在一个由六个齐次变量所生成的流形中的射影度量几何相一致.*

要了解这一观点的详细阐述，我建议大家去参阅最近发表在 Math. Annalen (卷 VI) 上的一篇论文: “Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie (论所谓非欧几何)”，以及在本文末尾处的一个附注[2].

对上面所做的论述，我还要补充两点说明，其中第一点甚至已经隐含在已谈过的内容之中了，但是还有申述的必要，因为它所涉及的对象太容易引起误解了.

[1] 见附注 V.

[2] 见附注 VI.

如果我们引入任意的形体作为空间元素, 那么我们得到的就是任意多维数的空间. 但是我们之后如果立足于通常的 (初等的或射影的) 空间观点 (Anschauungsweise), 那么 [相当于] 我们一开始就为多维流形给定了作为基础的群; 这正好就是主群或射影变换群. 如果我们要想用另一个群作基础, 那么我们就必须放弃通常的或射影的直观. 因此, 如果说适当地选择空间元素空间就可以表示任意多维数的流形这有多么正确, 那么也可以这么说, *在这一表示中, 或者是预先就有一个确定的群作为处理这个流形的基础, 或者是, 如果我们想指定群, 就要相应地扩展我们的几何观念, 这就有多么重要.* —— 如果不注意到这一点, 例如, 就可能以下面的方式来寻求线几何的一种表示. 直线在线几何中含有六个坐标; 平面上的圆锥曲线也正好含有这些个系数. 因而线几何的图像就将是那样一个圆锥曲线系统的几何, 这个圆锥曲线系统是从全体圆锥曲线的集合中通过其系数之间满足一个二次方程而挑选出来的. 只要我们选由圆锥曲线系数的线性变换来代表的变换中不改变二次条件方程的那一部分变换的集合, 用它作为平面几何基础的群, 这样做就是正确的. 但是如果我们固持初等的或射影的观点, 那么我们就不会有任何图形.

第二点意见涉及下述推理过程. 设在空间中给定了某一群, 比如说主群. 则我们选出一单个的空间形体, 比如一个点, 一条直线, 或一个椭圆体也可, 再将主群中的所有变换应用于其上. 于是人们就得到了一个多重无穷的流形, 其维数一般来说等于在群中所包含的任意参数的个数, 如果就是这些原来选定的形体具有能在群中的无穷多个变换下变到自身的性质的这种特殊情形下, 维数就会下降. 每一个这样生成的流形称之为关于生成群的体 (Körper)[1]. 如果我们现在想在群的意义下来研究空间并就此指定确定的形体作空间元素, 而且我们又不想使那些具有相同特征的东西得到不同的表述, 那么显而易见*我们必须这样来选空间元素, 使得其流形要么本身就构成一个体, 要么可以分解为体*[2]. 稍后 (§9) 我们将给出这个明显的说明一个应用. 体的概念本身还将在末尾一节联系着相关的概念再一次进行讨论.

## §6 径向反演几何学. 关于 $x+iy$ 的解释

我们在本节中回过来谈在几何学研究中的各种不同的方向, 在 §2 §3 中我们已开始讲到过它们.

作为射影几何研究方法的一个对比, 人们可以从多种角度来考察一类几何思

[1] 我是根据 Dedekind 的一个先例来选用这个名称的, 在数论中, 一个数域 (Zahlengebiet), 如果是由给定的元素通过给定的运算生成的, 就叫做体 (Dirichlet 的数论讲义第二版).

[2] [在正文中没有充分注意到, 前面提到的群可能含有所谓的例外子群 (ausgezeichnete Untergruppe —— 英译为 self-conjugate subgroup (自共轭子群)). 如果一几何形体在一例外子群的操作下不变, 那么通过整个群的操作所生成的所有形体, 即由它所得出的体, 也同样会这样. 具有这种性质的体完全不适于表示这个群的操作因而在正文中只讲了那种体, 它是由那样一些空间元素生成的, 先前给定的群中没有哪个例外子群能使它们保持不变. (1893)]

想, 其中有一种是接二连三地应用径向反演变换的方式. 对所谓的四次圆纹曲面 (Cycliden) 及自反曲面的研究, 正交系的一般理论, 进一步还有对势的研究等等就是属于这一类. 如果说包含在这些研究中的内容尚未综合成像射影几何那样的一种特殊的几何, *一种以由主群与径向反演变换相结合而成的全体变换的群作为研究的基础的几何*, 那么这完全是归因于上述理论在其后并未得到系统的表述这一偶然的情况; 有个别在这个方向工作的作者已经离这种方法上的观点不太远了.

只要一提到比较的问题, 自然就会有这个径向反演几何与射影几何之间的对比, 因而一般来说完全只需指出以下几点:

在射影几何中, 点, 直线, 平面是基本概念, 圆和球只不过是圆锥曲线和二次曲面的特殊情形. 初等几何中的无穷远表现为平面; 与初等几何相关联的基本形体是在无穷远处的一个虚圆锥曲线.

在径向反演几何中, 点, 圆和球是基本概念, 而直线和平面是上述概念的特殊情形, 其特征是, 它们包含了那个无穷远点, 这个点从方法上来讲绝不是比别的点更突出些, 只要人们设想这个点固定, 就得到了初等几何.

径向反演几何还可以这样来包装, 使得它好像是二元形式理论和线几何的一个分支. 为达到这个目的. 我们首先限于讨论平面几何, 因而也就是限于讨论平面上的径向反演几何[1] .

我们已思考过平面初等几何与那配备有一特殊点的二次曲面的射影几何之间的关系 (§4). 如果人们忽略这个特殊点, 因而也就是来考察曲面本身的射影几何, 则我们就会得到平面上的径向反演几何的一个表示. 因为人们容易确证[2] , 平面的径向反演变换群, 借助于二次曲面的映射, 相应于所有将后者变到自身的线性变换的集合. 于是人们有:

*平面的径向反演几何与二次曲面上的射影几何是一样的.*

而且完全对应地有:

*空间径向反演几何与对一个由五个齐次变量间的一个五次方程所描绘的流形的射影处理, 是等价的.*

于是通过径向反演几何将空间几何与一四维流形相联系, 完全与通过线几何将它与五维流形相联系是一样的.

只要人们只注重实变换, 平面上的径向反演几何或许可从另一方面给我们提供一个有趣的表现形式和用途. 这就是, 如果人们以通常的方式把复变量 $x + iy$ 展

---

[1] 直线上的径向反演几何与直线的射影研究是等价的, 因为二者的变换是一样的. 因此人们也可以在径向反演几何中谈一条直线上的, 进而谈到圆上的, 四个点的交比.

[2] 见已经提到过的论文: Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie (论线几何与度量几何), Math. Annalen 第 V 卷 [见本文集论文 VIII].

布在平面上, 那么它们的线性变换就对应于上述限制到实变量的径向反演群[1]. 但是, 设想能经过任意线性变换的一个复变量, 它的函数的研究, 不是别的, 只不过是那表述方式稍加改变了的二元形式理论. 因而有:

*二元形式理论可以通过实平面上的径向反演几何来表示, 而且与变量的复值表示也完全一样.*

为了在通常的概念范围内得到射影变换我们可以从平面上升到二次曲面. 由于我们只考察平面的实元素, 人们如何选择曲面就不再是无所谓了; 显然不能选它为直纹面. 特别地我们可以把这曲面 —— 正如为了解释复变量也特别是这样做的 —— 设想为球面, 并由此得到下述定理:

*复变量二元形式的理论可以用实球面的射影几何学来表示.*

我还实在是禁不住想用一个附注[2] 来阐述, 用这个图像来解释二元三次形式和双二次形式的理论有多么漂亮.

## §7 前述内容的推广. Lie 球几何

二元形式的理论, 径向反演几何以及线几何, 它们如前所述是一致的, 区别仅在于变量的数目不同, 它们都与某种推广相联系, 这些我们现在就要来谈一谈. 这种推广曾经一度有助于用新的例子诠释这样的思想, 即确定对给定领域的处理方式的群可以任意扩大; 但是这之后, 阐述 Lie 在最近的一篇论文[3] 中所做的研究与我们在此所提出的思想之间的关系也是我们特别的目的. 我们通向 Lie 的球几何之路在一定程度上有别于 Lie 所采用的, 因为 Lie 是联系到线几何的概念来做的, 而我们, 为了更紧密地与通常的几何直观相衔接并与前面所讲的保持着联系, 在相关叙述中假设了较少的变量数目. 正如 Lie 本人已经指出 (Göttinger Nachrichten 1871, N.7, 22), 他所做的研究与变量的数目无关. 它们属于一个大的研究范围, 从事于任意多个变量之间的二次方程的研究, 这是我们已经屡次接触过的研究, 而且我们还会一再遇到 (见 §10 及其他).

我从通过球极投影所建立的实平面与球面之间的联系来着手. 在 §5 中我们已经通过将直线与这条直线与圆锥曲线所交出的点偶相对应的办法建立了平面的几

---

[1] [正文中的表述不够准确. 与线性变换 $z' = \dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$(其中 $z' = x' + iy', z = x + iy$) 相对应的只是径向反演群中的, 不会将角度翻转的那一部分操作 (在其作用之下, 平面上的两个圆点 (Kreispunte) 不会互换). 如果人们还想把整个的径向反演群包括进来, 那么人们就还要上述变换再加上另一种 (其重要性绝不亚于前者的) 变换: $z' = \dfrac{\alpha \bar{z}+\beta}{\gamma \bar{z}+\gamma}$, 其中 $z'$ 仍 $= x'+iy'$, 但 $\bar{z} = x+iy$ (1893)]

[2] 见附注 VII.

[3] Partielle Differentialgleichungen und Complexe (偏微分方程与线丛), Math. Annalen V.

何与一圆锥曲线上的几何之间的联系. 相应地我们也能建立空间几何与圆锥上的几何之间的联系, 办法也是令空间中的每一平面与该平面交圆锥所得到的圆相对应. 然后通过球极投影将球上的几何从球上转移到平面上去, 这时每一个圆都转换成圆, 因而下述两种几何相互对应.

以平面为元素, 采用那些把球变到自身的线性变换群作为基础群的空间几何.

以圆为元素, 以径向反演群为基础群的平面几何.

现在我们要将第一种几何向两方面进行推广, 办法就是将原来的群代之以一个包容它的群. 于是推广的结果通过映射就直接变换成平面几何.

代替在由平面组成的空间中那些把球变到自身的线性变换, 显然易知有两种选择, 或是选空间的全体线性变换, 或是选空间中的全体平面变换, 它们 [在一种尚待给出的意义下] 保持球不变, 就是说, 在前一种情形下将球忽略不论, 而在另一种情形下, 则对所采用的变换的线性特性无需置论. 第一种推广是直接就好理解的, 因此我们可以首先来讨论它, 并探讨它对平面几何的意义; 第二种推广我们将在以后回过来谈, 这时首先要解决的是, 确定这种类型的最一般的变换.

空间的线性变换具有一个共同的性质, 即把平面束与平面把仍变成平面束与平面把. 但是在球上变换把平面束变成圆束, 即变成一单重无穷系列的、具有公共交点的圆; 平面把变成圆把, 即变成一双重无穷系列的圆族, 这些圆都与一固定的圆正交 (这个固定的圆所在的平面是那与所给把中平面有公共点的极平面). 因而在球面上以及进而在平面上对应于空间的线性变换的就是具有如下性质的圆变换, 它们把圆束与圆把变成仍是圆束与圆把[1]. *采用这样得到的变换群做基础群的平面几何就是普通的射影空间几何的一个表示*. 在这种几何中不能用点作平面的元素, 因为点对所选的变换群来说不能构成一个体 (§5), 而是要选圆作为元素.

对于所说的第二个推广, 首先有必要解决相应的变换群的问题. 为此要寻求这样一种平面变换, 它们把 [其轴与球面相切的平面束仍变成这样的平面束] —— (在方括号内的一句在 1872 年的原文中为 "顶点位于球面上的平面把仍变成这样的平面把" —— 中译者注). 为了简明起见我们首先把问题返回到它的对偶形式, 在这之后再向减低维数的方向走一步; 我们要问, 怎样的点变换能从一给定的圆锥曲线上的每一条切线仍得出一条切线. 为达此目的我们来把平面连同其上的圆锥曲线看成是一二次曲面的映像, 造成这个映像的映射是这样的, 从不在二次曲面上一个空间点出发这样来向平面投影, 使得所述圆锥曲线成为边界曲线. 曲面的母线对应于圆锥曲线的切线, 而且这时上述问题就归结为另一个寻求把母线变成母线、将曲面变到自身的点变换的问题.

可是这种变换甚至有任意无穷多个 (这里英译本写成: 其个数为 $\infty^n$, 这里 $n$ 可以为任意数 —— 中译者注): 因为人们只需要把曲面上的点看成是两组母线的

[1] 在 Graßmann 的延量学中恰好也研究了这些变换 (在 1862 年的第二版的 278 页上).

交点并将每一直线组变换到自身就可以了. 但是在这些变换中特别有线性变换. 我们要研究的也就只是它们. 因为如果我们要研究的不是曲面, 而是一由二次方程表示的多维流形, 则这时只有线性变换, 其他的都不复存在了[1].

这些将平面变到自身的线性变换, 通过 (非球极平面的) 投影转换到平面上之后会给出双值的点变换, 在这种变换下, 从构成边界曲线的圆锥曲线上的每一条切线得出的的确仍是一条切线, 但是从每一条其他的直线得出来的, 一般来说就是与边界曲线两重相切的圆锥曲线. 如果在构成边界曲线的圆锥曲线上建立一个射影度量, 就可以方便地来刻画这种变换. 这样一来就可以说这些变换具有如下的性质, 它们把那些在这个度量的意义下相距等于零的点, 还有那些与另一个给定的点相距为一个常数的点, 都变成仍具有这种性质的点.

所有这些研究都可以引申到任意多个变量的情形中去, 因而特别地还可应用于原来提出的有关以球和平面作元素的问题上去. 人们从而可以给所得结果以特别直观的形式, 因为两个平面, 在于球面上所建立的射影度量意义下所形成的夹角, 等于它们与球面所交出的圆在通常意义下所形成的交角.

这样我们就得到了在球上的, 并进而在平面上的一个圆变换群, 它具有如下的性质: **它把那些互相相切 (即相交角等于零) 的圆变成仍然是这样一些互相相切的圆, 把那些与另一个圆交角都相等的圆也都变成具有这样性质的一些圆**. 在球面上的相关线性变换, 在平面上的径向反演群的变换, 都包含在上述变换的群中[2].

---

[1] 如果对流形作球极平面投影, 则就会得到一个众所周知的定理: (已是在空间中的) 一多维区域中, 除了存在于径向反演群中的变换外, 不会有保形点变换存在. 相反在平面中则有任意多其他种的变换. 还可以参阅已引用过的 Lie 的著作.

[2] [在正文中所作的考察可以通过补上少量解析的式子来讲得清楚得多. 设与我们的平面球极射影相关的球面的方程在普通的四面体坐标系中为:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0;$$

这样一来满足这个条件方程的 $x$ 就具有平面四圆 (tetrazyklischer) 坐标的意义, 平面中的一般圆方程就将为:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0.$$

如果人们来计算这个圆的半径, 那么人们就会由此得到下述根式

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2},$$

我们可以把它记为 $iu_5$. 现在我们又可以把圆看成是平面的元素. 于是径向反演群就可以用 $u_1, u_2, u_3, u_4$ 的齐次线性变换的全体来表示, 这种变换保持

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$$

以其多重数变到自身. 但是那个相当于 Lie 的球几何的, 扩张圆几何的扩张群由那些五个变量 $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$ 的那样一些齐次线性变换组成, 它们把

$$u^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2$$

以其多重数变到自身. (1893)]

以这个群为基础的圆几何, 类似于 Lie 对空间所建立的球几何, 而且也和它一样在研究曲面曲率时有特别的意义. 正如径向反演几何在某种意义下包含了初等几何一样, 圆几何也在这个意义下包含了径向反演几何. ——

这个刚才得到的圆 - (球 -) 变换有一个特别的性质, 它把相切的圆 (球) 变成正好也是相切的圆 (球). 如果把所有的曲线 (曲面) 都看成是圆 (球) 的包络形体, 那么因此就有, 相切的曲线 (曲面) 必定变成又是这种相切的曲线 (曲面). 因而这里提到的变换属于我们在稍后要作一般考察的切触变换这一类, 在这类变换下点形体的相切是一种不变关系. 本节开始提到 Graßmann 的圆变换, 还有类似的球变换也可与它们并列在一起, 都不是切触变换. ——

如果说上述两类推广只涉及径向反演几何, 那么这些也以相应的方式适用于线几何, 而且正如我们已经指出过的, 一般来说也适用于对通过一二次方程挑出的流形作射影研究, 不过我们不打算在此作进一步的讲述了.

## §8 以点变换群为基础的其他方法的枚举

仅就不计与交换空间元素相联系到的对偶变换来说, 初等几何, 径向反演几何以及射影几何, 都可以划归为一个可以想象得到的研究方式的集合中的个别项, 总之, 它们都是以点变换群为基础的. 我们打算在此只提出以下三种, 它们与刚才所讲到的研究方式都是一致的. 虽说这些方法也还远未在整体上像射影几何那样发展成为一门独立的学科, 它们还是以其鲜明的形象出现在新近的研究中[1] .

### 1. 有理变换群

谈到有理变换, 我们必须很好地来区分, 这种变换是对我们运算的区域中的所有点, 因而也就是对空间或平面等等, "为有理的", 还是只对区域中所含的一个流形, 即一个曲面, 一条曲线来讲是有理的. 如果我们要在至今所述的意义下来设计空间的或平面的一种几何, 我们就要应用第一种; 如果要研究在一给定的曲面、曲线上的几何, 从在这里所述的观点出发, 后一种才有意义. 在马上要讲到的位置分析 (Analysis situs) (这是拓扑学的早期名称 —— 中译者注) 中也要区分这两种情况.

然而迄今为止所作的研究, 不论在何处, 主要都是涉及第二类变换. 只要对曲面和曲线的几何所研究的问题, 不是涉及去寻求判断两曲面、曲线能否相互转换的

[1] [直到现在为止所处理过的例子都是和参数个数为有限的群打交道, 而从现在起在正文中要谈所谓的无限群了. (1893)] [但是为了避免误解起见我们要指出, 在 Lie 的后来的研究中, 无限群的含义要窄得多, 也就是限于这样一些群, 它们允许通过微分方程来定义. K.]

判据, 这些研究就不在我们这里要研究的范围之内[1]. 本文提出的一般方案肯定不能包含全部数学研究, 而只不过是把某些方向概括到一个统一的观点之下.

以第一类变换为基础的有理变换几何学, 到现在才刚刚起步. 在第一级的区域内, 即在直线上, 有理变换恒等于线性变换, 因而没有提供什么新东西. 在平面内人们当然知道全体有理变换 (Cremona 变换), 并指出它们可以通过二次变换组合生成. 人们还知道平面曲线的不变特征: 它们的亏格, 模数的存在; 但是这些研究还没有真正发展成我们这里所意谓的平面几何. 人们至今对有理变换还知之甚少, 而且就用这些不多的知识通过映射来把已知曲面与未知曲面联系起来. ——

**2. 位置分析**

在所谓的位置分析中, 人们要寻求相对于这样一些变换保持不变的东西, 这些变换是由无穷小变形组合生成. 在这里人们也必须和我们已经讲过的那样, 区分变换的对象究竟是整个区域, 因而例如是整个空间, 或者只是从其中分出来的一个流形, 一个曲面. 第一类变换是那种我们可以用来作一种空间几何基础的变换. 它的群的构作完全不同于迄今所考察过的群的构作方式. 因为它包括了所有由设想为实的无穷小点变换所组合而成的变换, 它们承受着只能对实的空间元素起作用的原则性的限制, 并且在任意函数的域上变动. 人们还可以对这个群作有点儿巧妙的扩充办法, 就是把它们再与也能改变无穷远的实直射变换结合起来. ——

**3. 全体点变换的群**

如果说对于这种群不再有曲面能具有自己的个性, 因为任意一个曲面通过这个群的变换都可以变成任何其他的曲面, 那么存在更高级的形体, 用这个群来研究它就会有一定的优越性. 就这些在此作为基础的几何概念来说, 如果此后不把这些形体再看成是几何形体, 而是看成只是不期而遇找到了几何上的应用的解析结构, 它们照样有效, 而且如果应用于其研究过程 (就正好像是任意的点变换), 人们直到最近才知道开始把它们理解为几何变换. 属于这种解析结构 (analytische Gebilde) 的首先有齐次微分表达式, 其次偏微分方程也是. 但是对后者的一般讨论而言, 正如在下一节会详述的, 包括全体切触变换的群还是更合适一些.

---

[1] [从另一方面来讲它又最好是适于正文中的考察, 这在 1872 年我还不知道. 设预先给定某一代数形体 (曲线或曲面, ⋯⋯), 我们来把它转移到一高维空间中去, 作法就是将其所属的第一类被积函数 (Integranden erster Gattung) 的比例值

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \cdots : \varphi_p$$

当做齐次坐标引进来. 于是人们在这个空间中就简单地以 $\varphi$ 的齐次线性变换群作为进一步考察的基础. 参见 Brill, Nöther 和 Weber 诸位先生的著作, 还有, 例如, 我本人在 Math. Annalen 第 36 卷上的论文: “Zur Theorie der Abel Funktion (论 Abel 函数理论)” [见本文集卷 III]. (1893)]. [对在前一节处理的例子, 可将其中常常出现的群, 在转移到一适当选取的高维空间时用一个线性变换群来代替. 于是研究总是可以得到射影上的应用. 显而易见的问题是, 由此得出一个一般性的原理究竟有多远, 看来一直还没有得到研究. K.]

在以全体点变换的群为基础的几何中有效的主要定理是, *对空间的一个无穷小的部分, 一点变换的作用总是相当于一线性变换*. 因此射影几何的发展现在对无穷小的区域就有了它的意义, 正是由于这一点, 在处理流形时的群特别可以任选 —— *射影观点方法的突出特点也就正在于此*.

我们已经有很久不再谈论以相互包容的群为基础的考察方式之间的关系了, 在这之后, 我们想在此再为在 §2 中给出的一般理论举一个例子. 我们要问, 究竟应该怎样从 "所有点变换" 的观点来理解射影性质, 这时可以不考虑原本是属于射影几何的群的对偶变换. 于是这个问题就与下面这另一个问题是一致的: 通过怎样的条件能把线性变换从点变换的总体中分出来. 前者的特征是, 它把任一平面都映射成平面: 它们就那样一种点变换, 在其作用之下平面的流形 (或根据同样的理由, 直线的流形也一样) 保持不变. *射影几何是从所有点变换的几何通过加入平面的流形而得出的, 正如初等几何是由射影几何通过加入无穷远球圆而得出的一样*. 特别地, 例如, 从全体点变换的观点来看, 我们可以把一曲面标记为某一阶次的代数曲面看成是对平面的流形的一个不变关系. 当我们像 Graßmann [Crelles Journal, 第 44 卷 —— 英译本注] 那样把代数形体的生成与其直尺作图相联系, 这一点就十分清楚了.

## §9 关于全体切触变换

切触变换的一些个别情形甚至早就被人们研究过; *Jacobi* 在作分析的研究时就已经用到了最一般的切触变换; 但是它们只是通过 Lie 的最近的著作才第一次被引入到生动的几何观念中来[1]. 因此我们在这里特别地来阐明一下, 什么是切触变换, 也许不是多余的, 这时我们仍然像往常一样, 只限于点空间为三维的情况.

用分析的观点来讲, 所谓切触变换就是指那种将 $x, y, z$ 和它们的偏微分系数 $\dfrac{dz}{dx} = p, \dfrac{dz}{dy} = q$ 的变量值用新的 $x', y', z', p', q'$ 表示出了. 易见在此变换下相切的曲面一般变成仍为相切的曲面, 这就是用切触变换这个名字的理由. 在以点作为空间元素出发, 切触变换可分为三类: 使三重无限多的点所对应的仍为点 —— 这就是我们刚刚考察过的点变换, 再就是, 那种把它们变成曲线的变换, 最后是那种把它们变成曲面的变换. 我们不必就此把这个分类看得太重要, 因为在用其他种类的三重无限多的空间元素, 例如平面时, 当然仍然会有分成三类群的情况出现, 但是它并不与以点为基础所出现的分类一致.

如果在一点上应用所有的切触变换, 那么它就会变成所有的点, 曲线和曲面的集合. 因而这些点, 曲线和曲面, 以其总体构成了我们的群的一个体 (Körper). 人们由此可以推断出这个一般规则, 认为, 如果在所有切触变换的意义下形式地处理一

[1] 特别见已引著作: 论偏微分方程与线丛, Math. Ann, 第 V 卷, 文中所给出的有关偏微分方程的论述我主要是从 Lie 的口述得知的; 见其注记: 关于偏微分方程 Göttinger Nachrichten, 1872 年 10 月.

个问题, (例如马上就要摆到读者面前的偏微分方程的理论), 当我们只以点 (或平面) 坐标时, 必定是不完整的, 因为作为基础的空间元素正好不构成体.

但是如果还要保持与通常方法的联系, 那么要想将上述体中所包含的个体当做空间元素引入就行不通, 因为它们的数目是无限重无穷 ($\infty^\infty$ —— 英译本) 的. 于是就有必要在这些考察中, 作为空间元素引入的既不是点, 也不是曲线或曲面, 而是*面元*, 即数值组 $x, y, z, p, q$. 在每一切触变换下每一面元变成一个新的面元; 于是这五重无穷多的面元就构成一个体.

在这个观点之下必须把点, 曲线, 曲面都一样要理解为面元的聚集 (Aggregate), 而且甚至是二重无穷多的聚集. 因为曲面要用 $\infty^2$ 个面元来覆盖, 曲线则与同样多的面元相切, 而每一个点也有 $\infty^2$ 个面元通过. 但是这些二重无穷多的面元聚集还有一个共同的特征性质. 人们把两个相邻的面元 $x, y, z, p, q$ 和 $x + dx, y + dy, z + dz, p + dp, q + dq$, 在有以下式:

$$dz - pdx - qdy = 0$$

描述的关系时, 说成是处于*相连位置* (vereinigte Lage). 因此点, 曲线, 曲面就等同于*一个由面元组成的二重无穷流形, 这个流形的每一个面元都与那些有单重无限多个的相邻的面元处于相连位置*. 这样一来, 点, 曲线, 曲面有共同的特征, 而且当人们以切触变换群为基础时, 必须用分析的方法来表示它们.

相邻面元处于相连位置是一个在任何切触变换下的不变关系. 但是反过来我们也可以*把切触变换定义成五个变量 $x, y, z, p, q$ 的那样一些代换, 在它们的变换下, 关系 $dz - pdx - qdy = 0$ 保持不变*. 在这种研究中空间被看成一五维流形, 而且在对此流形作处理时, 要以所有变量变换的集合中那些保持微分间的某一确定的关系不变的那部分作成的群为基础.

我们要研究的对象首先是那样一种流形, 它们由变量间的一个或几个方程, *即一阶偏微分方程及一阶偏微分方程组来描述*. 有一个主要的问题是, 如何从面元的流形中挑出满足给定方程的面元来: 也就是挑出面元的单重, 二重的无限系列, 它们每一个均与其相邻的面元成相连关系. 例如, 一阶偏微分方程的求解就归结为这种问题. 可以这样来表述这个问题: 从那些满足方程的四重无限多的面元出发, 分离出上述类型的二重无限的流形来. 特别是完全解的问题现在取如下的准确的形式: 将满足方程的四重无限多的面元以某种方式分解为二重无限多的这种流形.

我不打算在此跟踪对微分方程的这一研究; 有关这一方面我推荐大家去参阅已引用过的 Lie 的著作. 只是还要强调指出, 从切触变换的观点来看, 一阶偏微分方程没有不变量, 因为它们的每一个都可以变到任何其他一个, 特别是线性方程已不再有什么独特之处. 只有当人们回到点变换的观点时, 区别才会出现.

切触变换群, 点变换群, 最后射影变换群, 能够用一个统一的方式来表征. 这

一点我禁不住要来谈一谈[1]. 切触变换已经定义成这样一种变换, 它保持相邻接的面元处于连接位置这一性质不变. 点变换则相反, 它的特征性质是把处于相连位置的相邻接的线元素变成也具有这种性质的线元素. 最后, 直射与对偶变换则保持相邻接的连缀元素 (Konnexelemente) 处于相连位置这一性质不变. 我这里所说的连缀元素, 是指一个面元以及包含在其中的一个线元素所构成的并集. 两个相邻接的连缀元素, 如果其中一个, 不仅是它的点, 而且它的线元素, 都包含在另一个连缀元素之中, 我们就说它们位置相连. 连缀元素这个 (也许是个临时性的) 名称与最近 *Clebsch*[2] 在几何学中所引入的一个形体有关, 这一形体是由一个同时包含了一系列的点坐标, 一系列的平面坐标和一系列的直线坐标的方程来描绘的, 在平面上的一个类似这样的形体 Clebsch 把它称之为连缀 (Konnexe).

## §10 论任意维流形

我们已反复强调指出, 我们把此前的论述与空间的概念联系在一起, 只是希望借助直观的例子能更有利于阐明抽象的概念. 但就所考察的内容本身而言, 它们与直觉的图像无关, 而是属于数学研究的一般领域, 人们称之为多维流形理论, 或者 (按照 Graßmann) 简称作为*延伸学* (Ausdehnungslehre). 人们是如何实现将前述内容从空间转移到单纯的流形上, 这是显而易见的. 我们在此只是想再一次指出, 与几何学相反, 我们在抽象研究中有一个好处, 这就是我们可以完全任意选择变换群作为研究的基础; 而在几何学中却事先就给定了一个最小的群, 即主群.

在这里我们只能就下述三种处理方式, 而且也只是简单地触及一下.

### 1. 射影的处理方法或现代代数学 (不变量理论)

它的群由对描述流形个体的变量所作的线性变换和对偶变换的全体组成, 它就是射影几何的推广. 我们已经指出过, 这种处理方法是如何出现在应用于对高一维流形中的无限小的讨论之中. 它在下述意义上包括了我们下面还要讲的另两种处理方法, 即它的群包含了作为这另两种处理方法的基础的群.

### 2. 常曲率流形

这种流形的概念是由 Riemann 从更一般的流形的概念中引申出来的, 在这种更一般的流形中给定了一个变量的微分表达式. 它的群就是由所有那些保持这个给定的微分表达式不变的全体变换所组成. 如果在射影意义上我们在以变量之间的一个给定的二次方程为基础建立起度量关系, 我们就能从另一个方面达到常曲率

[1] 我把这些定义归功于 Lie 的一个评注. [Lie 对这个还相当有意义的定义在他的后来的工作中好像从未回来讨论过. K.]

[2] 见 Gött. Abhandlungen, 1872 (第 17 卷): 论不变量理论的一个基本课题 (Über eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie), 还有特别是 Gött. Nachrichten 1872, 第 22 期: 论解析几何中的一个新的基础形体 (Über ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene).

流形的概念. 这种方式与 Riemann 的方式相比, 出现了一个推广, 即把变量设想为复数; 我们可以随后把变量限制到实数域. 我们在 §5, §6 和 §7 中曾涉及的大量研究就属于这里所讲的情形.

**3. 平面流形**

Riemann 把曲率恒等于零的常曲率流形称之为平面流形. 它的理论是初等几何的直接推广. 它的群能够 —— 和初等几何中的主群一样 —— 通过下述方式从射影几何群中分离出来, 即将那些保持一个由两个方程, 一个是线性方程, 一个是二次方程, 所描绘的一个形体不变的变换分离出来而得. 如果还要想与通常的理论的表述形式相对接, 那么就要将实数域和虚数域这两种情况分开来讨论. 属于这个理论的, 首先要数初等几何本身, 然后, 比如, 还有在新近所开创的对通常的曲率理论的推广, 等等.

# 结 束 语

最后还有两点说明值得一谈, 它们与我们至今所讲述的有密切的联系. 一点是有关人们用来表达此前概念发展的形式体系. 另一点是, 我们要指出若干问题, 按照我们这里所叙述的观点来着手处理, 看来是重要而又很有价值的.

人们常常责难解析几何, 说它引进坐标时偏好选用任意的元素. 对于用变量值来表征其个体的多维流形的各种处理方式, 也受到了同样的责难. 如果说由于人们对坐标方法的使用, 尤其是在从前, 还有缺陷, 这种责难还言之有理的话, 那么在对所采用的方法作合理的处理之下它就会销声匿迹. 在群的意义下研究流形时可能出现的解析表达式, 倘若偶然采用了坐标系的话, 根据它的意义, 应与坐标系无关, 而且现在也有必要把这一无关性用明显的形式地表示出来. 现代代数学指出这是可能的, 并且指出了它是怎样完成的, 在其中把我们在此要用到的形式化的不变量概念以最明确的方式表示了出来. 它拥有一个关于不变量表达式构成的普遍而又详尽的法则, 并且原则上只限于运用这种表达式来运算. 如果用不是射影群的其他群作基础, 对其形式化的处理也提出了相同的要求[1]. 因为形式化的表述毕竟应该与概念的构成一致, 于是我们既可以把形式化的表述只用作概念本身的准确而又明晰的表达, 或者人们也可以利用它, 以便在它的帮助下深入到尚未被研究过的领域

[1] [例如, 对三维空间绕一固定点的转动群, 四元数就是这样一种表述形式. (1893)]

[但是我自己后来对正文的这个要求就很少遵守. 对此起决定作用的是我在自己的工作, 特别是在教学中的经验告诉我老是要去学习新式的书写符号一般来说所耗费的时间要比通过应用去学会它们所花的时间要更多. 只有很少的数学家才会去学习他同时代作者频繁推荐的各种符号 (而反过来, 有很多数学家肯定会发现, 他们会用某种他们自己所创造的新符号来表达他们的思想). 由于这里所说的这种行为, 当前我们已经在数学中有了一种广泛的失语症 (Sprachverwirkung), 如果说这也并不像是想要达到使所有的数学进步自我闭锁的最终目的, 那也是很值得怀疑的. K.]

至于我们还想要谈的另一个问题, 通过将前面讲到的观念与所谓的 Galois 方程式理论相比较就会引出来.

在 Galois 理论中, 和这里一样, 兴趣都是集中在变换群上. 而变换所涉及的对象则全然不同, 在那里人们只与有限个分立的元素打交道, 而这里则要与一个连续流形无穷多个元素打交道. 但是由于群概念的一致性还可以作进一步的比较[1]; 而且我更想在此指出, 人们肯定会按照这里所阐述的观念赋予 Lie 和我已经开始的研究[2] 一种地位, 通过它也可以更好地来表征.

在 Galois 理论中, 如在 Serret 的《Traité d'Algeèbre supérieure (高等代数教程)》或在 C. Jordan 的《Ttaité des substitutions (代换理论教程) 》中所论述的那样, 真正要研究的对象就是群论或代换理论本身, 方程式论不过是作为它的一个应用而得出的. 相应地我们也需要一种*变换理论*, 即一种能由具有给定性质的变换所产生的群论. 和在代换理论中一样, 可换性和相似性等概念都会用到. 在以变换群为基础的对流形的处理就以变换理论的一个应用的面貌出现.

在方程式论中, 我们首先就是有系数的对称函数, 它们本身就是引人入胜的, 其次我们还有这样一些表达式, 它们即使不能对根的全体代换保持不变, 至少也能对一大堆根的代换保持不变. 与此相当, 在以一个群为基础来研究流形时, 我们首先要问清所有的体 (Körper) (§5), 即经过群的全体变换保持不变的形体. 但是, 也还有这样一些形体, 它们不是在群的所有变换下保持不变, 而只是在群的某一部分变换下保持不变, 于是这种形体在以这个为基础的处理的意义下特别有意思, 它们具有出色的性质. 因此将在普通几何意义下的对称形体与规则形体, 旋转曲面与螺旋曲面区别出来, 就是有赖于此. 如果站在射影几何的立场上, 还特别要求使形体保持不变的那些变换是可换的, 那么就会得到在已引证过的、Lie 和我的论文中考察过的那些形体, 并导致在 §6 中提出过的一般问题. 在 §1 和 §3 那里所定出的平面上的无穷多个可换线性变换, 就是属于刚刚所讲的一般变换理论的一部分[3] .

---

[1] 我要在这里提请大家想起, Graßmann 在他的《延伸理论 Ausdehnungslehre》, 第一版 (1844) 的引言中, 已经对组合理论和延量理论做过比较.

[2] 见我们合作的论文: Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen (论那一类平面曲线, 它们在一单重无限多个可换线性变换的封闭系统下保持不变), Math. Annalen, 第 IV 卷.

[3] 我不得不放弃在正文中来说明, 在微分方程的理论中无穷小变换的研究所取得的丰硕成果. Lie 和我在已引证过的著述的 §7 中已经指出, 容许同样的无穷小变换的常微分方程, 也出现了相同的积分困难. 至于这些研究应如何应用于偏微分方程, Lie 在不同的地方, 特别是在上面所引用过的论文 (Math.Ann. V) 中, 用了几个不同的例子作了论述 (特别见 Mitteilungen der Academie zu Christania, 1872 年 5 月).

[特别是根据正文观点我后来在代数方程方面的研究, 和我对超越自守函数方面的研究一样 (这二者将都将刊载在本文集的随后两卷中), 也应与 Erlangen 纲领的叙述放在一起. 关于这一点请参见我的《Vorlesungen über das Ikosaeder (二十面体讲义)》(Leipziig, Teubner, 1883) 一书的前言, 我在其中明白地指出了我的有关的工作与 Lie 同时在连续变换群方面的研究的对比. K.]

# 附 注

## I. 谈现代几何学中的综合方向和解析方向的对比

目前, 人们对现代综合几何学和解析几何学之间的差别已经不再那么看重了, 因为在它们的研究内容和推论方式这两方面都逐渐塑造得完全类似了. 因此在正文中我们选用 "射影几何学" 这个词来作为这二者的共同名称. 如果说, 综合方法更多地用空间的直观来进行研究, 并从而给予它的一流的、朴素的成果以非比寻常的魅力, 那么, 一个这样的空间直观领域也并不会将解析方法拒之门外, 并且, 人们可以把解析几何学的公式理解为几何关系的一个准确而又清晰的表达. 另一方面, 一个设计得好的形式体系会在一定程度上走在思想的前面, 从而有助于进一步的研究, 人们对它的这一好处也不能低估. 然而我们总要坚持这样一个要求, 即, 一个数学课题, 只要还没有做到在概念上明显时, 就不能认为是解决了; 而在形式体系上的推进还只是迈出了第一步, 然而却是很重要的一步.

## II. 今日之几何分离成各个分支

如果人们注意到, 例如, 数学物理学家自始至终对哪怕只是稍稍用一点已是很成熟了的射影观点在许多情况下就能带来的好处也不屑一顾, 正如在另一方面的射影几何学的学子们也不愿去接触由曲面的曲率理论所发掘出来的数学真理的宝藏, 那么人们就不得不认为几何知识当前的状况真是不够完善, 但同时渴望很快就会成为过去.

## III. 关于空间直观的意义

如果说我们在正文中把空间直观看成是某种附属的东西, 这只是对要进行研究的纯数学内容来讲的. 对它来说, 直观只具有使说明形象生动的意义, 这一切对教育方面来讲应给以很高的评价. 从这个观点上来说, 例如, 一个数学模型就极具教学意义, 也非常有趣.

但是空间直观意义的问题的提出, 一般来说, 则完全是另一回事. 我把空间直观自身看成是某种独立的东西. 存在一种真正的几何, 它并不是和已讲过的研究的正文中所说的那样, 只是抽象研究的形象生动的说明形式. 在这里所涉及的, 空间图形如何根据它们的全部成型的实际 (vollen gestaltlichen Wirklichkeit) 来理解, 而且对它们能够成立的 (就它们的数学内容这一方面来讲的) 关系, 应能作为空间观

念的基本定理 (公理 —— 中译者注) 的明显的推论来把握. 对这种几何来讲, 一个模型 —— 不管它现在是构造出来而被看见了的, 抑或只是被生动地想象成的 —— 已不再是达到目的的工具, 而是事物的本身.

当我们这样把几何学看成是一门独立于纯粹数学的学科而与它相提并论时, 这本身并不是什么新的东西. 但是再一次鲜明地提出这个观点还是很有意义的, 因为新近的研究几乎把它完全忽略了. 反过来新近的研究也是几乎没有用于掌握空间产物的形状上的关系, 而且正是在这个方向上显得大有希望之时, 没有用到它, 这一点就与此密切有关[1].

## IV. 关于任意维流形

空间作为点的存身之所只有三维这一点, 从数学的观点来看, 是用不着来讨论的; 但是同样从数学的观点上来看, 人们也无法阻碍任何人去主张空间实质上有四维, 甚至无限多维, 虽然我们能够感受到的只是三维. 多维流形的理论怎样越来越走向数学研究的前台, 根据它的本质, 与这一主张完全无关. 但是已经在其中建成的一种习惯用语, 当然就是从这个观点导出的. 人们不再讲流形中的个体, 而改说一高维空间中的点, 等等. 但是就其本身来说这种用语也有许多优点, 就此而言, 它通过回想起几何的直观而使理解变得更容易一些. 但它会带来有害的后果, 以致在一个相当大的范围内认为对任意多维流形的研究是与上述空间性质的概念一致的. 没有什么比这个见解更缺乏根据了. 如果这个观点是正确的, 那么相关的数学研究当然就立即会找到几何上的应用 —— 但是它的价值和它的意图都是寓于其固有的数学内容之中, 而与这个观点也毫无关系.

而当 Plücker 教导我们, 把真实的空间理解为一任意多维的流形, 则完全是另一回事, 这时人们是引入了依赖于任意多个参数的几何形体 (曲线, 曲面等等) 来作为空间的元素 (见正文的§5).

把任意维流形的元素当做空间点的类似物的思想方式最早是由 Graßmann 在他的延量理论 (1844) 中所开创的. 他的思想完全不涉及上述关于空间本质的看法; 后者要回溯到 Gauß在一次偶然的机会所作的简短的评注并通过 Riemann 的研究工作, Riemann 在其中提到了这个评注, 把它推广到多维流形而为在一个更广范围内的人们所知. 这两种见解 —— Graßmann 的以及 Plücker 的 —— 各有各的优点; 人们交替地使用着它们二者的优点[2].

[1] [我在有关形状 (Gestalten) 方面, 特别是关于代数曲线和代数曲面的形状方面的研究, 可在本全集的第 II 卷中找到. K.]

[2] [近百年来数学思想取得了怎样的进展毋庸多言. 特别是有关 Graßmann 的见解以及他对代数形体的处理, 我提请大家去参阅 Segre 在数学百科全书的 III 2, 第 7 册 (1918) 上所撰写的评述. K.]

## V. 关于所谓的非欧几何

在正文中所提到的射影度量几何, 正如新近的研究告诉我们, 它在本质上与在放弃了平行公理之下所设计出来的度量几何相吻合, 当今它以非欧几何之名多次受到评论和商议* . 如果说在正文中我们根本没有触及这个名称, 这是由于一个与上一注释中的叙述有关的理由. 人们把太多的非数学的想象与非欧几何这个名称联系到了一起, 这些非数学的想象一方面受到了巨大热情的支持, 另一方面又受到了同样多的激烈的排斥 (perhorreszirt), 但是我们的纯粹数学的研究靠它们没有得出任何创新来. 下面的叙述可能阐明我们想在这方面为澄清概念而有所作为的愿望.

上述关于平行理论的研究及其进一步的完善在数学上有两方面的意义.

它曾证明 —— 人们可以把这一点看成是它的独一无二的、完美无缺的业绩 —— 平行公理不是平常放在它前面的那些公理的数学推论, 而是在其中表达了一个本质上崭新的, 在先前的研究中没有被触及过的直观要素. 人们可以, 也应该对每一个公理, 而不只是几何学, 完成类似的研究; 从而人们由此就能获得这些公理相互之间地位的洞识.

其次这些研究又将一个非常有价值的数学概念赠送给我们: 这就是常曲率流形的概念. 正如我们已经指出过并且在正文的 §10 中进一步阐述了的那样, 它与独立于所有平行理论而成长起来的射影度量存在着最紧密的联系. 如果说研究这种度量本身就有极高的意义, 并且允许大量的应用, 那么它还包含了在几何学中给定的度量作为它的一个特例 (极限情形), 并且教我们从一个提高了的观点去理解后者.

有一个问题, 它完全与已讲过的观点无关, 这就是, 平行公理的基础何在, 我们是像一部分人所认为的那样, 把它看成是绝对给定的, 还是像另一部分人说的那样, 愿把它看成只是由经验近似证明了的. 如果假设基础为后者, 那么立即就会有一个有关的数学研究问题, 即人们如何去构造一种更准确的几何. 然而, 这个问题的提法显然是一个涉及我们认识的最一般基础的哲学问题. 这种问题的提法不会使纯粹的数学家感兴趣, 他希望他的研究不会与人们对这个问题是从这方面还是从另一方面给出的回答有关.

## VI. 线几何看成是对一个常曲率流形的研究

当我们把线几何与五维流形中的射影度量相结合时, 我们必须注意到, 我们在直线中看到的 (在度量的意义下) 只是流形的无穷远的元素. 因此有必要考虑一下, 一射影度量对它的无穷远元素取什么值, 并且在此来探讨一下, 如何去排除要不然会阻碍我们将线几何理解为度量几何的困难. 我们联系到一个直观的例子来进行这种探讨, 这个例子给出了建立在二次曲面上的射影度量.

* 这里原文为 diskutiert, 而在 1872 年的原始版本上的原文是 disputiert (争议). —— 中译者注

空间中任取的两个点相对于曲面有一个绝对不变量: 它们的连线与曲面的两个交点和这两个点形成的交比. 但是如果将在两个点挪到曲面上, 那么这个交比不论这两个点的位置如何都会等于零, 只有这两个点在同一条母线上这个情况例外, 这时它的值不定. 如果这两个点不重合, 这就是在其关系中唯一能出现的特例, 于是我们得到下述定理:

*在空间中人们在一二次曲面上所能建立的射影度量并不能为这个曲面上的几何给出任何度量.*

通过将曲面变到自身的线性变换能够将其上的任意三个点变成其上的其他三个点, 上述结论就与此有关[1].

如果想在曲面本身上有一个度量, 人们就必须限制变换群, 而这一点只要我们固定一个任意的点 (或者它的极平面) 就能做到. 首先假设这个点不放置在曲面上. 这样我们把曲面从这个点投影到一平面上, 这时就有一条圆锥曲线作为边界曲线出现. 我们以这条圆锥曲线为基础在平面中建立一个射影度量, 然后再反过来把它转移到曲面上[2]. 这是一个真正的有常曲率度量, 从而我们有下述定理:

*一旦我们保持置于曲面外的一点固定, 我们就在曲面上得到了一个这样的一个有长曲率的度量.*

相应地可以得到[3]:

*如果取曲面本身上的一个点作这个固定点, 我们就会在曲面上得到一个其曲率为零的度量.*

对于曲面上的所有这些度量, 曲面的母线都是长度为零的直线. 因此曲面上的弧元对不同的度量只差一个常数因子. 曲面上不存在绝对的弧元. 但是我们完全可以谈曲面上传播方向之间的夹角. ——

所有这些定理和研究结果现在都可以直接用到线几何上去. 对线空间 (Linienraum) 本身暂时还不存在实质性的度量. 当我们保持一线性线丛固定时才会产生出这样一个度量, 而且甚至它还会得到常曲率或零曲率, 视线丛是一般线丛还是特殊线丛 (一条直线) 而定. 绝对弧元的出现也特别与这个挑出来固定的线丛有关. 与一给定直线相交的、长度为零的相邻直线之间的相对传播方向则与此无关, 于是我们就能谈两个任意传播方向之间所形成的夹角[4].

---

[1] 这个关系在普通的度量几何中发生了改变; 对这种几何, 两个无穷远点自然有一个绝对不变量. 人们这时在清点将无穷远曲面变到自身的线性变换的数目时可能遇到的矛盾, 因为其中的平移和相似变换根本不会改变无穷远, 从而就被消除了.

[2] 见正文 §7.

[3] 见正文 §4.

[4] 见论文: 论线几何与度量几何. Math. Ann, 第 5 卷.

## VII. 关于二元形式的解释

我们打算在此来考虑, 在以 $x+iy$ 的球面解释为基础之下, 可以赋予三次二元形式的形式系统以及双二次二元形式的形式系统以何种一目了然的外表形式.

一个二元三次形式 $f$ 有一个三次共变量 $Q$, 一个二次共变量 $\Delta$ 和一个不变量 $R$[1]. 由 $f$ 和 $Q$ 组合成一六次共变量的完全系列

$$Q^2+\lambda\cdot Rf^2,$$

其中包含了 $\Delta^3$. 人们可以证明[2], 三次形式的每一个共变量都必定能分解为这种由六个点组成的点系. 只要 $\lambda$ 可取复数值, 就会有二重无限多的这种共变量.

这个如此框定的形式系统现在可以用下述方式表示在球上[3]. 通过一个将球变到自身的适当的线性变换, 我们可以把表示 $f$ 的三个点变到球上一个大圆上的三个等距的点. 可以把这个大圆看成赤道; 代表 $f$ 的这三个点在它上面具有地理经度分别为 $0°, 120°, 240°$. 这样一来, $Q$ 就由赤道上经度分别为 $60°, 180°, 300°$ 的三个点来表示, 而 $\Delta$ 则由两个极点来代表. 每一个形式 $Q^2+\lambda Rf^2$ 由六个点来表示, 其地理纬度和经度包含在下表格中, 其中 $\alpha$ 与 $\beta$ 为任意数:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|}\alpha & \alpha & \alpha & -\alpha & -\alpha & -\alpha \\ \beta & 120+\beta & 240+\beta & -\beta & 120-\beta & 240-\beta\end{array}.$$

如果我们跟踪球上的这个点系, 我们就会有趣地发现, 这些点由此出现的次数计算起来, $f$ 和 $Q$ 会是两次, $\Delta$ 会是三次.

一个双二次形式 $f$ 有一个同样次数的共变量 $H$, 一个六次共变量 $T$, 两个不变量 $i$ 和 $j$. 要特别指出的是, 双二次形式族 $iH+\lambda jf$ 全部都属于该 $T$, 而且在其中可以将 $T$ 分解成它们的三个二次因子, 含于其中都要计入两次. ——

现在来通过球的中心作三根相互垂直的轴 $OX, OY, OZ$, 它们与球面交出的六个点构成形式 $T$. 令 $x, y, z$ 表任一球面点的坐标, 一四重形式 $iH+\lambda jf$ 的四个点由下表

$$\begin{array}{rrr}x, & y, & z, \\ x, & -y, & -z, \\ -x, & y, & -z, \\ -x, & -y, & z\end{array}$$

[1] 见 Clebsch 的《Theorie der binären Formen (二元形式的理论)》(1871) 一书中相关章节.

[2] 通过考察将 $f$ 变到自身的线性变换, 见 Math. Ann, 第 4 卷, 352 页. [论代数方程预解式的一个几何表示.]

[3] [也可见 Beltrami: Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche (二元三次形式的几何学研究), Accademia di Bologna, Memorie, 1870 (1893).] [Beltrami 文集, 第 II 卷.]

表示. 这四个点每次都构成一对称四面体的四个顶点, 它的对边被坐标系的轴线所平分, 由此表明了 $T$ 在双二次方程理论中起到 $iH+\lambda jf$ 的预解式的作用[1] .

Erlangen, 1872 年 10 月.

# 附 1　Klein 为本文的英译写的前言*

我在 1872 年的 "纲领", 作为一单行本出版, 开始只是在一个小范围内发行. 对此我是比较容易理解的, 因为不可能期望在纲领中所展开的观点在一开始就受到太大的关注. 但是现在数学在这一时期以来的发展就是准确地沿着这一观点所指出的道路, 而且特别是自从 Lie 开始以广泛的形式发表他的 "变换群理论" (Leipzig, Teubner, vol. I (1888), vol. II (1890)) 以来, 看来有必要在一个更大的流通范围内出版我的 "纲领" 一文. 由 M. Gina Fano 完成的意大利文的译本最近发表在 Annali di Mathematca, ser.2, vol. 17. 对其英文译文的接受也受到了同样的期待, 这我要感谢 Haskill 先生.

译文完全是紧扣原文的. 在少数几个地方有字句的变动. 新的用语放在方括号内, 一系列附加的脚注也是这样来标明. 看来有必要加入的大部分已经在意译文本中有了.

F. Klein

# 附 2　Klein 为本文的法文译本写的前言†

在《Annali di Matematica (数学年鉴)》刊载了我的《Erlangen 纲领》的意

[1] [我在本文集第 II 卷所刊载的论述 "在线性变换下变到自身的二元形式" 的论文 (特别见 Math. Annalen, 第 9 卷, 1875) 可以作为紧接正文提示之后的直接叙述.

此外我还乐意推荐 Möbius 的研究工作, 我决定重新发表 Erlangen 纲领与它有关 (在 1885—1887 年间我被萨克逊科学协会邀请参与筹备他的工作的全集出版事宜后, 我本人才理解到它们之间的内在联系). Möbius 那时还并不知道群的一般概念, 也不知道我在 Erlangen 纲领中作为例示列举过的许多几何变换, 但是他受到一种自信预感指引, 将他的在几何方面一个接一个的研究工作准确地指向相当于纲领的基本思想所指的方向. 他在其重心计算 (1827) 一书的中部将 "几何课题" 按照与 "等同性"(叠合), "相似性", "仿射性" 以及 "直射性" 的 "亲缘关系" 来进行整理. 从 1853 年起开始发表他在 "保圆变换 (Kreisverwandtschaft)"(= 平面上的径向反演几何). 在这之前 (1849) 出现了他论述晶体对称性的第一篇报告. 但是在 1863 年, 在他 73 岁的高龄, 他以其论述 "基本变换"(即几何学中的那一领域, 我们今天称之为位置分析 (Analysis situs)) (这是 Klein 当时的提法, 今天已习惯称之为拓扑学 —— 中译者注) 方面的报告投入工作. 人们可以把这些报告与 Curt Reinhardt 先生在 Möbius 的全集第 II 卷和第 IV 卷中根据他的手写的遗稿的丰富内容所能作出的有趣的论述相比较. K.]

* 这个前言译自本文的英译本. —— 译者注.

† 这个前言采自《数学史译文集》(上海科学技术出版社, 1981年) 第 13 页. —— 中译者注

大利文译本后, 大约一年以前, 我以很高兴的心情接受了 Padé 先生要出版一个法文译本的建议, 因为目前群论似乎在法国受到空前的重视, 我的纲领的内容也许将在那里激起一些关注. 在意译本中我对正文做了少量的修改,并加了一些附注, 在正文中都用 [ ] 标明,其他基本上原封不动.在此后的工作中, 不管多么接近我的论题, 我也没有引用. 因为要系统地总结在 1872 年以后发表的成果是一个长期的任务, 我觉得, 对于我的纲领, 如不做全面和详细的修改, 不可能把其中的中心思想清楚地表达出来. 我希望将来能完成它.

# 附录 II

# 单复变量函数一般理论基础

Bernhard Riemann

[博士论文, Göttingen, 1851; 未加变动的第二版, Göttingen, 1867]

## 1.

设想 $z$ 为一变量, 它能逐步取得所有可能的实数值, 如果对它的每一个值有某个量 $w$ 的一个唯一的值与之对应, 我们就说 $w$ 是 $z$ 的函数, 而且如果, 当 $z$ 在两个固定值之间连续变动时, $w$ 也同样地作连续的变动, 我们就称此函数是在这个区间内的连续函数.

这个定义显然根本没有在这个函数的个别值之间设定什么规律, 就是说, 如果要规定这个函数在某一区间上的值, 那么将它延拓到上述原来那个区域之外完全可以是任意的.

量 $w$ 对量 $z$ 的依赖关系可以用一个数学规律来给出, 从而对每一个 $z$ 的值可以经一定的量的运算求出其相应的 $w$ 来. 能够将对应于 $z$ 在某一区间内全部值的 $w$ 用同一个相互关联的规律来确定, 以前认为只有某一定类型的函数才可能 (按照 Euler 的说法, 叫做 functiones continuae (连续函数)); 新近的研究表明, 对一给定区域上的任意连续函数都可以用一个解析表达式来描述. 因此量 $w$ 对量 $z$ 的依赖关系, 不论是任意给出的, 还是通过一个确定的量的运算来规定的, 都一样. 由于上述定理, 这两个概念是一致的.

但是如果量 $z$ 的变动范围不限于取实值, 而可以取像 $x+yi$ (其中 $i=\sqrt{-1}$) 这种形式的复数时, 情况就不一样.

设 $x+yi$ 和 $x+yi+dx+dy\,i$ 为量 $z$ 所取的两个相差无限小的值, 它们对应 $w$ 的两个值分别为 $u+vi$ 和 $u+vi+du+dvi$. 这样一来, 如果量 $w$ 对 $z$ 的依赖关系假定是任意的, 比值 $\dfrac{du+dv\,i}{dx+dy\,i}$ 一般来说会随 $dx$ 和 $dy$ 而变, 就是说, 如果令 $dx+dy\,i=\varepsilon e^{\varphi i}$, 则

$$\frac{du+dv\,i}{dx+dy\,i}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)i$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)i\right]\frac{dx-dy\ i}{dx+dy\ i}\\
=&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)i\\
&+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)i\right]e^{-2\varphi i}.
\end{aligned}
$$

但是在 $w$ 作为 $z$ 的函数也能用简单的量的运算的结合来确定的那种方式下, 微商 $\frac{dw}{dz}$ 总是会与微分 $dz$ 的具体值无关[1]. 因而显然不是每一个复变量 $w$ 对复变量 $z$ 的任何依赖关系都可以用这种方式来表达.

上面提到的这个所有由量的运算所确定的任何函数都具有的特征, 我们将以它作为下面研究的基础, 在下面对这种函数的研究将不依赖于这种表达式, 就是说, 我们不去证明这种特征对用量的运算表达的相互依赖性的概念的必要性和充分性, 直接从下面的定义出发:

一个复变量 $w$ 随另一个复变量 $z$ 的改变如果具有这样的性质, 即微商 $\frac{dw}{dz}$ 的值与微分 $dz$ 的值无关, 我们就说 $w$ 是 $z$ 的函数.

**2.**

不论是 $w$ 还是 $z$, 都被认为是变量, 它们都可以取任一复数值. 这样一种展布在一二维连通区域上的变动范围 (Veränderlichkeit) 的概念, 通过与立体的几何直观相联系, 理解起来就会容易得多.

设想量 $z$ 的每一值 $x+yi$ 用平面 $A$ 上其直角坐标为 $x, y$ 的点 $O$ 来表示, 量 $w$ 的每一值 $u+vi$ 用平面 $B$ 上其直角坐标为 $u, v$ 的点 $Q$ 来表示. 于是量 $w$ 对量 $z$ 的每一依赖关系就可表示为点 $Q$ 的位置对点 $O$ 的位置的依赖关系. 对 $z$ 每一个值都有一个随 $z$ 连续改变的 $w$ 的一个确定的值与之对应, 换言之, 如果 $u$ 和 $v$ 是 $x, y$ 的连续函数, 则平面 $A$ 上的每一点与平面 $B$ 上的一点相对应, 其上的每一条曲线, 一般来说, 与平面 $B$ 上的一条曲线相对应, 其上的每一块连通的面块与平面 $B$ 上的一块连通的面块相对应. 因而人们可以把这样一个量 $w$ 对量 $z$ 的依赖关系设想为平面 $A$ 到平面 $B$ 上的一个映射 (Abbildung).

**3.**

现在我们来研究在 $w$ 为复变量 $z$ 的函数, 即, 在 $\frac{dw}{dz}$ 与 $dz$ 无关时, 这个映射会有什么性质.

我们用 $o$ 来表示平面 $A$ 上点 $O$ 附近的一个不定点, 用 $q$ 表它在平面 $B$ 上的像, 再用 $x+yi+dx+dy\ i$ 和 $u+vi+du+dv\ i$ 表量 $z$ 和 $w$ 在这两点的值. 于是

[1] 这一断言在那种可以通过微分法则从用 $z$ 来表示 $w$ 的表达式求出 $\frac{dw}{dz}$ 对 $z$ 的表达式来的所有情况下都是正确的; 它的严格的一般有效性至今尚有待确立.

可以把 $dx, dy$ 和 $du, dv$ 看成是点 $o$ 及 $q$ 相对于以点 $O$ 及 $Q$ 为原点时的直角坐标，而且如果令 $dx + dy\ i = \varepsilon e^{\varphi i}$ 以及 $u + dv\ i = \eta e^{\varphi i}$, 则量 $\varepsilon, \varphi, \eta, \varphi$ 就是这两个点以点 $O$ 及 $Q$ 为原点时的极坐标. 现在设 $o'$ 及 $o''$ 为点 $o$ 在无限靠近 $O$ 的两个确定点, 并且把与它们相关的其余符号的意义用相应的指标表示出来, 那么假设

$$\frac{du' + dv'\ i}{dx' + dy'\ i} = \frac{du'' + dv''\ i}{dx'' + dy''\ i}$$

以及随之而来的

$$\frac{du' + dv'\ i}{du'' + dv''\ i} = \frac{\eta'}{\eta''} e^{(\psi' - \psi'')i} = \frac{dx' + dy'\ i}{dx'' + dy''\ i} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} e^{(\varphi' - \varphi'')i},$$

由此得出 $\frac{\eta'}{\eta''} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}$ 以及 $\psi' - \psi'' = \varphi' - \varphi''$, 也就是说, 在三角形 $o'Oo''$ 与三角形 $q'Qq''$ 中角 $o'Oo''$ 与角 $q'Qq''$ 相等, 而且它们的对角边相互成比例.

因此在两个互相对应的无限小的三角形之间就会有相似性, 从而一般来说, 在平面 $A$ 上的一个无穷小的部分与其在平面 $B$ 的像之间存在着相似性. 这个定理的一个例外情形只有在那种特殊情况下才会出现, 那时量 $z$ 和 $w$ 相互对应的改变所成的比例不为有限, 而这种比例为有限的假设在推导中是默认了的[1].

**4.**

如果我们将微商 $\frac{du + dv\ i}{dx + dy\ i}$ 写成以下的形式

$$\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} i\right) dx + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dy\ i}{dx + dy\ i},$$

则我们就会得到, 在且只有在有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{以及} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

时, 微商才会对 $dx$ 和 $dy$ 的任意两个值具有相同的值. 因此这两个条件就是对于为使 $w = u + vi$ 能作为 $z = x + yi$ 的函数来说的充分和必要的条件. 由此条件得出这两个函数每个单独都要满足下述方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

[1] 关于这个情况可参阅 C. F. Gauß 的论文: "'将所给曲面的一部分这样来映射, 使得在极小部分映像与原像相似' 这个问题的一般解" (这是对 Copenhagen 王室科学协会 1822 年提出的悬赏问题的应征论文, 载 "天文学文集, Schumacher 主编, 第三册, Altona, 1825") (Gauß 全集, 第 IV 卷, 189 页).

它为我们研究这种函数中的单独项的性质奠定了基础. 我们将先行对整函数做深入的研究来证明这些性质的最重要的部分, 但是在这之前我们还要对几点属于一般领域的内容加以说明和规定, 以便为该研究铺平道路.

**5.**

对下面的研究我们将把量 $x, y$ 的变动范围限制到一个有限的区域内, 即我们不再把 $O$ 点的位置看成就在平面 $A$ 本身上面, 而是看成位于铺在其上的一个面 $T$ 上. 我们选择这样一种谈论相互叠在一起的面的表述方式, 这没有什么不得体的, 为的是给我们打开这样一扇可能性的大门, 使得我们点 $O$ 的位置可以多次伸到平面同一部分上面, 而且还假设在这种情况下, 相互叠在一起的面部分 (Flächentheile) 不至于沿一条线连在一起, 这样将面折叠 (Umfaltung) 起来或撕开 (Spaltung) 成相互叠在一起的部分的情况就不至于发生.

在平面的任何部分上相互叠在一起的面部分, 在其位置的边界及其定向 (即其内侧和外侧) 给定后, 其数目就完全确定了; 可是它们的形状还是可以各不相同的.

实际上如果我们在平面上通过被面覆盖的部分任意作一条曲线 $l$, 那么沿着它只有在越过边界时相互覆盖面部分的数目才会改变, 确切地说, 就是从外穿入内时改变一个 $+1$, 在相反的情况下, 就改变一个 $-1$, 因此处处都是确定的. 沿这条线的边岸每一块接壤的面部分以完全确定的方式向外延拓, 直至与边界线相交, 因为无论如何只有在个别的点上才会有不确定性 (Unbestimmtheit), 因而也就是或者在这条线上的一点, 或者是离这个位置有限远的一个点上才会有这种不确定性; 因此, 如果我们把研究限于曲线 $l$ 位于面的内那部分并在其两侧只限于一充分小的面带 (Flächenstreifen), 我们就能谈*确定的* (*bestimmten*) 接壤的面部分, 它们在两侧的数目相等, 而且, 在我们赋予曲线以确定的方向之时, 我们将其左侧的面部分记为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 其右侧的记为 $a'_1, a'_2, \cdots, a'_n$. 于是 $a$ 的每一面部分就将延拓成 $a'$ 的一个面部分; 而且这一点一般来讲甚至对曲线 $l$ 的全程来讲都是这样, 可是对 $l$ 的特殊位置可在它的一点上发生变化. 我们假定在这样一个点 $\sigma$ 的上面 (即沿 $l$ 的前面的那些部分) 面部分 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 按顺序与面部分 $a'_1, a'_2, \cdots, a'_n$ 相连接, 但是在它的下面则与后者连接的则是 $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \cdots, a_{\alpha_n}$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 只是在顺序上不同于 $1, 2, \cdots, n$, 所以在 $\sigma$ 的上面一个从 $a_1$ 变成 $a'_1$ 的点, 当它在 $\sigma$ 的下面回到左侧时, 它就会到达面部分 $a_{\alpha_1}$, 而当它从左到右绕点 $\sigma$ 转一圈时, 那么这时面部分所在的指标, 其顺序就将会按下述数字排列:

$$1, \alpha_1, \alpha_{\alpha_1}, \cdots, \mu, \alpha_\mu, \cdots.$$

在这个序列中, 只要 1 没有重复, 所有各项必定是各不相同的, 因为对任一中间项 $a_\mu, \mu$ 以及在它前面直至 1 的所有各项必定是按紧接着的顺序一个领先一个; 但是经一定数目的项数后, 这个数目显然必定会小于 $n$, 设它等于 $m$, 这时项 1 又重新

出现, 那么余下的各项必定又会按原来的顺序排列. 于是那个围绕着 $\sigma$ 转动的点在每转过 $m$ 圈之后又重新回到原来的面部分上, 而且只限于在这 $m$ 块相互叠在一起的面部分上, 这些面部分在点 $\sigma$ 上连接成一个单独的点. 我们称这个点为面 $T$ 的 $(m-1)$ 阶支点 (Windungspunkt). 通过将同样的方法应用到其余 $n-m$ 个面部分, 如果它们不是走散开的, 它们就会分解为由 $m_1, m_2, \cdots$ 个面部分组成的系统, 在这种情况下在 $\sigma$ 点上还有 $(m_1-1)$ 阶的, $(m_2-1)$ 阶的, …… 支点存在.

如果 $T$ 的边界的位置及其定向, 以及它的支点的位置都已给定, 那么 $T$ 或者是已完全确定, 或者是仍还限于有限个不同的位形; 后者, 在目前看来这些确定的面块与相互叠置的不同面部分相关.

一个变量, 如果它对面 $T$ 上的任一点 $O$, 一般来说, 也就是无一例外地只排除个别的线与点[1], 所取的确定值随该点的位置连续改变, 显然就可以看成是 $x, y$ 的函数, 而且今后随时随地只要是谈 $x, y$ 的函数, 就是按这个方式来规定这个概念.

可是在我们转向考察这种函数之前, 我们还要插入几句有关面的连通性的话. 就此我们将只限于讨论这样的面, 它们尚未沿一条线被撕开.

## 6.

两个面部分, 如果在面内有一条线能将一面部分内的点与另一面部分内的点连起来, 我们就认为它们是连通的, 或者说属于同一块面, 否则就认为它们分离的.

一块面的连通性的研究是以用横割线将面割开的方法为基础的, 这里说的横割线是指一条从一个边界点单重 (即其上没有一个点是多重点) 地经过内部抵达一个边界点的线. 后面这个点也可以是位于作为边界外加上去的部分, 那么也可以就是横割线上的原来那个点.

一片连通的面, 如果任意横割线都能将它分成几块, 我们就说它是单连通的, 否则就说成是多连通的.

**引理 I** 一单连通面 $A$ 由任一横割线 $ab$ 分割成两个单连通的块.

设在这两块中有一块不能由横割线 $cd$ 分成小块, 则我们显然有, 分别根据其两个端点都不在, 或者只有端点 $c$ 在, 或者两个端点都在 $ab$ 上的不同情况, 通过沿整个 $ab$ 线, 或沿 $cb$ 部分, 或沿 $cd$ 部分与它连接起来, 就会得到一个连通的面, 它可通过一条横割线从 $A$ 得出来, 这就与假设矛盾.

**引理 II** 如果一面 $T$ 通过 $n_1$ 条横割线[2] $q_1$ 分割成 $m_1$ 块单连通的面块系统

[1] 这个限制甚至不是函数的概念对本身所要求的, 而是为了能将无穷小计算应用于其上所要求的: 一个在一块面上的所有点上都不连续的函数, 例如像这样的函数, 它在可公度的 $x$ 和可公度的 $y$ 上取值为 1, 但对其余的 $x, y$ 上则取值为 2, 我们对它既不能微分, 又不能积分, 因而根本就不能对它 (直接) 作无穷计算. 我们在此对面 $T$ 有意作的这个限制将在稍后 (15 节) 来说明它的必要性.

[2] 所谓通过多条横割线的分割总是要按逐次的方式来理解, 即将由横割线产生的这样的一个面再通过一个新的横割线作进一步的分割.

$T_1$, 又通过 $n_2$ 条横割线 $q_2$ 分割成 $m_2$ 块面块系统 $T_2$, 则 $n_2-m_2$ 不可能 $> n_1-m_1$.

$q_2$ 的每一条线, 如果它不完全落在线系 $q_1$ 中, 就同时会形成面 $T_1$ 的一条或多条横割线 $q_2'$, 作为横割线 $q_2'$ 的端点可以认为是:

a) 横割线 $q_2$ 的 $2n_2$ 端点, 但如果它们的端点与线系 $q_1$ 的一部分重合时, 则除外.

b) 横割线 $q_2$ 中的每一个与线 $q_1$ 的中间点相交的中间点, 但如果它已经是处于 $q_1$ 的另一条线中, 即如果它与 $q_1$ 的一条横割线的端点重合时, 则除外.

现在我们来用 $\mu$ 表示这两个系统的横割线在其全程中相遇或分岔的次数 (其中单个的共同点这时要计入两次), 用 $\nu_1$ 表示 $q_1$ 的端部与 $q_2$ 的一个中部相叠合的次数, 用 $\nu_2$ 表示 $q_2$ 的端部与 $q_1$ 的中部相叠合的次数, 最后用 $\nu_3$ 表示 $q_1$ 的端部与 $q_2$ 的端部相叠合的次数, 那么提供的横割线 $q_2'$ 的端点个数为 Nr. 1: $2n_2-\nu_2-\nu_3$, Nr. 2: $\mu-\nu_1$; 但是这两种情况合起来就包括了全部的端点, 而且每个只含一次. 因而这种横割线的总数就是

$$\frac{2n_2-\nu_2-\nu_3+\mu-\nu_1}{2}=n_2+s.$$

用完全相同的推论可以得出由横割线 $q_1$ 生成的面系 $T_2$ 的横割线 $q_1'$ 的总数为

$$\frac{2n_1-\nu_1-\nu_3+\mu-\nu_2}{2},$$

因而 $=n_1+s$. 于是面系 $T_1$ 显然通过 $n_2+s$ 条横截线 $q_2'$ 就会变成和面系 $T_2$ 由 $n_1+s$ 条横割线 $q_1'$ 所分割成的面系一样. 但是 $T_1$ 由 $m_1$ 块单连通块构成因而根据引理 I 通过 $n_2+s$ 条横割线分割成 $m_1+n_2+s$ 块面块; 因而, 如果 $m_2<m_1+n_2-n_1$, 那么 $T_2$ 的面块数目经 $n_1+s$ 条横割线分割后就会使多块数多过 $n_1+s$, 而这是无意义的.

如果将不定的横割线数用 $n$ 来表示, 块的数目用 $m$ 来表示, 那么由于这个引理, 对将一个面分割成单连通块的所有分割来说, $n-m$ 是一个常数; 因为如果我们任取两个确定的分割, 一个通过 $n_1$ 条横割线的分割成 $m_1$ 块, 一个通过 $n_2$ 条横割线分割成 $m_2$ 块, 那么在第一次分割成的块为单连通块时, 就会有 $n_2-m_2\leqslant n_1-m_1$, 而在后者为单连通块时就有 $n_1-m_1\leqslant n_2-m_2$, 因而当二者均如此时, 就会有 $n_2-m_2=n_1-m_1$.

完全有理由可以将这个数命名为一个面的 "连通度 (Ordnung des Zusammenghangs)"; 它将能

通过任一横割线会减小 1 —— 这是根据定义,

通过从内部的任一内点简单地连到边界的一条线, 或一条经过先前的交点的线都不会发生改变, 以及

通过一条完全处于内部、两端点也在内部的一条割线会增加 1,

因为前者是通过一条横割线, 而后者是通过两条横割线变成的一条横割线.

最后对一由多块面构成的面来说, 在将这些块的连通度相加时, 它的连通度将保持不变.

然而我们在以下将主要限于由一块组成的面, 并且用单连通, 双连通等等这样质朴无华的称呼来表示它们的连通性, 其中所谓 $n$ 重连通的面就是指这样一种面, 能用 $n-1$ 条横割线把它分割成一单连通的面.

有关面的连通性与其边界之间的关系易知有:

1) 单连通面的边界必定是由一条单一的封闭曲线组成.

如果边界由分隔开的段组成, 那么就会有一条横割线 $q$, 它把一个段 $a$ 的点与另一个段 $b$ 的点连接起来, 只会与连通的面部分相交, 因为在面的内部会有一条线从横割线 $q$ 的一侧通到它的对面一侧; 这样一来横割线 $q$ 就不会把面割成小块, 而这与假设矛盾.

2) 用任意一条横割线只能使边界段的数目, 要么减少 1, 要么增加 1.

一条横割线 $q$ 要么把一边界段 $a$ 的一个点与另一个边界段 $b$ 的点连起 —— 在这种情况下全部这种线按顺序 $a, q, b, q$ 合起来形成边界线的一条单一的封闭段. ——

或者它把一段边界上的两个点连起来 —— 在这种情况下通过它的两个端点它分成两段, 其中每一段与横割线合起来形成一条封闭的边界段. ——

或者最后它终止于它前面的一个点, 并且能够看成是由一条封闭的曲线 $o$ 与另一条线 $l$ 组合而成, 这条线 $l$ 把 $o$ 的一个点与一边界段 $a$ 上的一个点连起来 —— 在这种情况下 $o$ 形成边界段的一部分, $a, l, o, l$ 形成它的另一部分, 二者都是自行封闭的.

从而就会有, 要么 —— 在第一个情况下 —— 以一条边界段代替两条, 或者要么 —— 在后两种情况下 —— 用两条边界段来代替一条, 我们的定理就由此推得.

由此可知, 构成 $n$ 重连通面块的边界的线段数要么 $=n$, 要么是一个偶数.

由此我们还可以得出下述推论:

如果 $n$ 重连通面块的边界的线段数 $=n$, 则通过任一在其内部自行封闭的简单横割线割成分离的两块.

因为这样做不会改变其连通度, 边界段的数目就要增加一个 2, 因而这个面, 如果它还是连通的话, 就将是一块 $n$ 重连通面而却有着 $n+2$ 条边界线段, 这是不可能的.

## 7.

设 $X$ 与 $Y$ 为二个对铺在 $A$ 上的面 $T$ 的全部点 $(x, y)$ 为连续的函数, 如果将

边界上任一点向内的法线对 $x$ 轴的倾角记为 $\xi$, 对 $y$ 轴的倾角记为 $\eta$, 则展布在这个面上的所有面元 $dT$ 的积分

$$\int\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dT=-\int(X\cos\xi+Y\cos\eta)ds$$

可以换成沿边界线的所有线元 $ds$ 的积分.

为了转换积分 $\int\frac{\partial X}{\partial x}dT$, 我们把平面 $A$ 被面 $T$ 所覆盖的部分用平行于 $x$ 轴的一组平行线分割成带元, 而且是这样来分割, 使得面 $T$ 的每一分支点在一条这样的分割线上. 在这个假设下 $T$ 位于其上的每一部分都是由一个或数个分开排列的梯形块所组成. 这种面带从 $y$ 轴切出一微元 $dy$, 于是某一个面带对 $\int\frac{\partial X}{\partial x}dT$ 的贡献值显然就会 $=dy\int\frac{\partial X}{\partial x}dx$, 这里这个积分是沿属于面 $T$ 上的那条直线, 该直线与经过 $dy$ 的一条法线相重合. 现在设这些直线的下端点 (即那些对应的 $x$ 最小的点) 为 $O_{,},O_{,,},O_{,,,},\cdots$, 其上端点为 $O',O'',O'''$, 将函数 $X$ 在这些点的值分别记为 $X_{,},X_{,,},\cdots,X',X'',\cdots$, 将面带从边界线上所切割出的相应线元记为 $ds_{,},ds_{,,},\cdots,ds',ds'',\cdots$, 将 $\xi$ 在这些线元处的值记为 $\xi_{,},\xi_{,,},\cdots,\xi',\xi'',\cdots$, 那么就有

$$\int\frac{\partial X}{\partial x}dx=-X_{,}-X_{,,}-X_{,,,}-\cdots+X'+X''+X'''+\cdots.$$

倾角 $\xi$ 显然在下端点处为锐角, 在上端点处为钝角, 于是有

$$\begin{aligned}dy&=\cos\xi_{,}d\xi_{,}=\cos\xi_{,,}d\xi_{,,}=\cdots\\&=-\cos\xi'd\xi'=-\cos\xi''d\xi''=\cdots.\end{aligned}$$

通过代入这些值就得到

$$dy\int\frac{\partial X}{\partial x}dx=-\sum X\cos\xi ds,$$

其中求和是对所有的边界线元来作的, 这些边界线元在 $y$ 轴上的投影就是 $dy$.

对所有在考察中会出现的 $dy$ 积分, 显然会穷尽面 $T$ 的所有面元和边界线的所有线元, 于是我们就得到, 在此范围内, 有

$$\int\frac{\partial X}{\partial x}dT=-\int X\cos\xi ds.$$

通过完全类似的推导, 我们有

$$\int\frac{\partial Y}{\partial y}dT=-\int Y\cos\eta ds,$$

从而得到

$$\int\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dT=-\int(X\cos\xi+Y\cos\eta)\,ds,\ \text{w.z.b.w.}^*$$

## 8.

我们用 $s$ 表在边界线上从一固定点沿某一稍后来确定的方向来计算的, 至一未定点 $O_0$ 的长度, 并用 $p$ 表在此点所作的法线上一未定点 $O$ 离该点的距离, 以指向内为正, 那么显然可以将在点 $O$ 处的 $x$ 和 $y$ 的值看成是 $s$ 和 $p$ 的函数, 于是在边界线的点上就有下述偏微商的关系:

$$\frac{\partial x}{\partial p}=\cos\xi,\quad \frac{\partial y}{\partial p}=\cos\eta,\quad \frac{\partial x}{\partial s}=\pm\cos\eta,\quad \frac{\partial y}{\partial s}=\mp\cos\xi,$$

其中上面的符号适用于当沿量 $s$ 增长的方向与 $p$ 的增长的方向所夹的角与 $x$ 轴和 $y$ 轴所夹的角一样, 如果相反, 就适用下面的符号. 我们将在边界上的所有部分将这个方向取成使得有

$$\frac{\partial x}{\partial s}=\frac{\partial y}{\partial p}\ \text{从而有}\ \frac{\partial y}{\partial s}=-\frac{\partial x}{\partial p},$$

这一般来说对我们的结果不会有大的妨碍.

显然我们可以把这种规定扩展到 $T$ 的内部的线上; 只不过在此为了规定 $dp$ 和 $ds$ 的符号, 在保持它们的相对关系和在那里所规定的一致下, 还要补充一点, 即要说明, 要规定的符号究竟是 $dp$ 的, 还是 $ds$ 的; 确切地说, 对一条能缩成一点的线要说明, 由它所分割开的面块中它是哪一块的边界, 由此就可把 $dp$ 的符号确定下来, 而在不能缩成一点的线的情况下则要说明其起点, 即 $s$ 在那里取最小值的端点.

将在上一节所得到的 $\cos\xi$ 和 $\cos\eta$ 的值代入就得到了所要证明的方程, 和在那里所取的范围一样:

$$\int\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dT=-\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds=\int\left(X\frac{\partial y}{\partial s}-Y\frac{\partial x}{\partial s}\right)ds.$$

## 9.

通过将上节末的定理应用到在面的所有部分均有

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0$$

的情形, 我们将得到下述定理:

* w.z.b.w. = 这正是要证明的. —— 中译者注

I. 设 $X$ 和 $Y$ 是两个在 $T$ 的任意点上为有限, 连续并满足下述方程

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0$$

的函数, 那么通过扩展到 $T$ 的整个边界上后有

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds=0.$$

设想将展布在 $A$ 上的面 $T_1$ 以任意方式分成两块 $T_2$ 和 $T_3$, 则下述对 $T_2$ 的边界的积分

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds$$

就可看出是对 $T_1$ 边界的积分与对 $T_3$ 边界的积分之差. 因为这时 $T_3$ 延伸到 $T_1$ 边界的部分二者的积分在此互相抵消, 而它所有其余的边界线元正好对应于 $T_2$ 边界的线元.

借助于这个变换由定理 I 得出:

II. 下述对展布在 $A$ 上的面的全部边界的积分

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds$$

的值, 在扩大或缩小一个任意常数下保持不变, 只是在这样做时要求不会有在其中定理 I 的假设得不到满足的面块出入其中.

如果函数 $X$ 和 $Y$ 的确在面 $T$ 任一部分上都满足上述微分方程, 但在个别的线或点上被不连续所困扰, 那么对每一条这样的线和每一个这样的点我们可以用一块任意的无限小的面部分作为外壳把它们围起来, 于是通过应用定理 II 我们就得到:

III. 对 $T$ 的全部边界求积的积分

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds$$

等于下述积分

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds$$

对所有包围不连续之处的边界求积之和, 而且对每一个这种不连续的地方, 不管用多么狭窄的边界去包围它, 积分保持为同一个值.

对纯粹的不连续点, 如果随着点 $O$ 到这点的距离 $\rho$ 同时有 $\rho X$ 和 $\rho Y$ 为无穷小, 则这个值必定为零; 因为这时如果我们引进一个以这个点为原点, 以任何方向

为极轴的极坐标 $\rho, \varphi$, 并且选一个围绕着该点半径为 $\rho$ 的圆作为围线, 则沿这条围线的积分可表为

$$\int_0^{2\pi}\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)\rho d\varphi,$$

并且不可能具有一个异于零的值 $\kappa$, 因为, 不管 $\kappa$ 多么小, 总可以将 $\rho$ 取得这样小, 使得在不计正负时 $\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)\rho$ 对 $\varphi$ 的任何值都小于 $\frac{\kappa}{2\pi}$, 从而有

$$\int_0^{2\pi}\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)\rho d\varphi<\kappa.$$

IV. 既然对展布在 $A$ 上的一单连通面的任一面部分沿其整个边界所作的积分

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds$$

或

$$\int\left(Y\frac{\partial x}{\partial s}-X\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds=0,$$

那么就可得知, 对任意两个固定点 $O_0$ 和 $O$, 沿位于其中从 $O_0$ 到 $O$ 的所有路线的积分均具有相同的值.

将点 $O_0$ 和 $O$ 连接起来的任意两条曲线 $s_1$ 和 $s_2$ 合起来就形成一条封闭曲线 $s_3$. 这条曲线或者是本身就具有未与任何多重点相交的性质, 或者我们可以将它分解成多个全都是简单的闭曲线, 办法就是从它的任一点出发沿该曲线前行, 每次遇到了前面的一个点时就将这中间经过的部分分离出去, 并把这接下来的部分看成是前面部分的直接的接续. 每一条这样的曲线都会将面分成一个单连通的区域和一个双连通的区域; 因此它就必定构成其中一块的全部边界, 因而沿它的积分

$$\int\left(Y\frac{\partial x}{\partial s}-X\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds$$

根据假设 $=0$. 由此可知, 如果在积分过程中处处都是沿着量 $s$ 增大的方向前行的话这个结果对沿整个曲线 $s_3$ 的积分也成立; 因此对沿曲线 $s_1$ 和 $s_2$ 的积分, 如果还保持积分路径的方向不变的话, 即一个从 $O_0$ 到 $O$, 另一个从 $O$ 到 $O_0$, 二者会互相抵消, 从而, 如果把后一积分的方向改过来, 二者就会相等.

现在设有一任意的面 $T$, 在其中, 一般来说, 有

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0,$$

那么, 我们首先, 如果必要的话, 将不连续的地点剔除出去, 使得在余下的面块中对任意的面部分有

$$\int\left(Y\frac{\partial x}{\partial s}-X\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds=0,$$

并用横割线把它分割成单连通的面 $T^*$. 于是对在此 $T^*$ 面内从一点 $O_0$ 连到另一点 $O$ 的曲线, 我们这个积分都具有相同的值; 为了简短起见这个值可以记为

$$\int_{O_0}^{O}\left(Y\frac{\partial x}{\partial s}-X\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds,$$

这样一来在将 $O_0$ 设想为固定, 将 $O$ 设想为可变动时, 它就将对任一 $O$ 的位置有一个与连线无关的确定的值, 从而也就可以看成是 $x,y$ 的一个函数. 这个函数在 $O$ 沿任一线元位移 $ds$ 时的改变可以表示为

$$\left(Y\frac{\partial x}{\partial s}-X\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds,$$

它在 $T^*$ 中处处连续, 并且沿 $T$ 的一条横割线两边相等.

V. 因此在将 $O_0$ 设想为固定时, 积分

$$Z=\int_{O_0}^{O}\left(Y\frac{\partial x}{\partial s}-X\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds$$

构成 $x,y$ 的一个函数, 它在 $T^*$ 中处处连续, 但在 $T$ 中在沿一条横割线从一个支点到另一个支点之间越过时会改变一个常量, 而且其偏微分有

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=Y,\quad \frac{\partial Z}{\partial y}=-X.$$

在越过横割线时积分的改变与一个等于横割线数的相互无关量的个数有关; 因为如果人们在横割线系中顺向后的方向走 —— 较后的在先 ——, 那么这一改变, 在其值一开始就对每一横割线就给定了的情况下, 处处都是确定的; 但是后者是相互无关的.

## 10.

如果到目前为止我们一直用 $X$ 来表示的函数代表

$$u\frac{\partial u'}{\partial x}-u'\frac{\partial u}{\partial x},$$

用 $Y$ 来表示的代表

$$u\frac{\partial u'}{\partial y}-u'\frac{\partial u}{\partial y},$$

则有

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=u\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}\right)-u'\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

因此如果函数 $u$ 和 $u'$ 还满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}=0,$$

则有

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0,$$

并由此可以找到上节诸定理对下述表达式

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds,$$

它现在

$$=\int\left(u\frac{\partial u'}{\partial p}-u'\frac{\partial u}{\partial p}\right)ds,$$

的应用.

现在我们假设函数 $u$, 包括它的一阶微商在内, 即使万一有的不连续性无论如何也不会沿一条曲线发生, 并且还假设随着这种不连续点到 $O$ 点的距离 $\rho$ 同时有 $\rho\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\rho\frac{\partial u}{\partial y}$ 为无限小, 从而 $u$ 的不连续性根据上一节 III 中的注释完全可以不计.

于是在这种情况下我们就可以在每一条经过不连续点的直线上取 $\rho$ 的一个值 $R$, 使得在这个值之下,

$$\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}=\rho\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\rho}+\rho\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\rho}$$

总是保持为有限, 再用 $U$ 表 $u$ 在 $\rho=R$ 处的值, $M$ 表函数 $\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}$ 在该区间内不计其符号时的最大值, 那么在这些意义下始终有 $u-U<M(\log\rho-\log R)$, 从而有 $\rho(u-U)$ 以及 $\rho u$ 都会随 $\rho$ 同时成为无限小; 但是根据假设这一点对 $\rho\frac{\partial u}{\partial x}$ 以及 $\rho\frac{\partial u}{\partial y}$, 并且在 $u'$ 没有不连续性时, 对

$$\rho\left(u\frac{\partial u'}{\partial x}-u'\frac{\partial u}{\partial x}\right)\quad 以及\quad \rho\left(u\frac{\partial u'}{\partial y}-u'\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

也都成立; 因此上一节所提到的情形在这里也会出现.

我们进一步假设由点 $O$ 的位置所形成的面 $T$ 处处单重地展布在 $A$ 上, 并设想其中一个任意点 $O_0$, 在其上 $u,x,y$ 取值为 $u_0,x_0,y_0$. 量

$$\frac{1}{2}\log((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)=\log r,$$

作为 $x,y$ 的函数于是就有

$$\frac{\partial^2\log r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\log r}{\partial y^2}=0$$

的性质, 而且只有在 $x=x_0,y=y_0$, 因而也就是我们的情况, 面 $T$ 上只有一个点会受到不连续性之累.

因此, 如果令 $\log r$ 作为 $u'$ 代入, 根据 9 节, III, 相对于 $T$ 的整个边界的下述积分

$$\int \left(u\frac{\partial \log r}{\partial p} - \log r\frac{\partial u}{\partial p}\right) ds$$

等于它对围绕 $O_0$ 的任一围道的积分, 而且, 因此我们如果选此围道为一圆周, 其 $r$ 为一常数值, 用 $\varphi$ 表其上一点沿任意方向到 $O$ 的弧长除以半径, 它就会等于

$$-\int u\frac{\partial \log r}{\partial r}rd\varphi - \log r\int \frac{\partial u}{\partial p}ds,$$

或者由于

$$\int \frac{\partial u}{\partial p}ds = 0,$$

有

$$= -\int_0^{2\pi} ud\varphi,$$

当 $u$ 在 $O_0$ 点连续时, 对一无限小的 $r$ 就过渡为 $-u_0 2\pi$.

于是在我们对 $u$ 和 $T$ 所作的假设下, 对在面内任一 $u$ 在该处为连续的点 $O_0$, 我们有

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int \left(\log r\frac{\partial u}{\partial p} - u\frac{\partial \log r}{\partial p}\right) ds,$$

其中积分是对整个边界的, 当积分是围绕 $O_0$ 的圆周时, 则

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ud\varphi,$$

由其中第一个表达式可以导出下述

**引理** 如果函数 $u$ 在一处处都是单重覆盖在平面 $A$ 的面 $T$ 内, 一般来讲, 满足微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

而且还假设有

1) 不满足这个微分方程的点不会构成面部分,

2) 在其上 $u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ 不连续的点不会连续地充满一条曲线,

3) 在每一个不连续点处, 量 $\rho\dfrac{\partial u}{\partial x}, \rho\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 随该点离开点 $O$ 的距离 $\rho$ 一起成为无限小, 以及

4) $u$ 的可移去 (hebbare) 不连续性已通过改变个别点处的值移去, 所以它和它的全部微商在这个面内部的所有点上均为有限和连续.

实际上, 如果我们把点 $O_0$ 考虑为可移动的, 则在表达式

$$\int\left(\log r\frac{\partial u}{\partial p}-u\frac{\partial \log r}{\partial p}\right)ds$$

中只有 $\log r, \rho\frac{\partial \log r}{\partial x}, \rho\frac{\partial \log r}{\partial y}$ 值会改变. 但是这些量, 包括它们的所有微商, 只要 $O_0$ 还保持在 $T$ 的内部, 对边界每一弧元均为 $x_0, y_0$ 的有限的、连续的函数, 因为微商是用这些量的分式有理函数来表示的, 在分母中只含有 $r$ 的幂. 因此这个结论对我们的积分的值, 从而对函数 $u_0$ 也都成立. 因为这些量在前面的假设下只能在那些它们在该处不连续的个别点上可能取与之不同的值, 而这种可能性通过引理的假设 4) 可以消除.

## 11.

在对 $u$ 与 $T$ 作与上节末相同的假设之下, 我们会有下述定理:

I. 如果沿某一曲线有 $u=0$ 和 $\frac{\partial u}{\partial p}=0$, 则 $u$ 处处 $=0$.

我们首先来证明, 一条其上有 $u=0$ 和 $\frac{\partial u}{\partial p}=0$ 的曲线 $\lambda$, 不可能构成一块其上 $u$ 为正值的面部分 $a$ 的边界.

假设出现了这种情况, 那么我们就从 $a$ 中割出一块, 它的边界一部分为 $\lambda$, 另一部分为圆周曲线, 且不含这个圆的中心点 $O_0$, 这种构作总是可能的. 于是, 如果我们将 $O$ 相对于 $O_0$ 的极坐标用 $r, \varphi$ 来表示, 就有下述沿这块的全部边界积分的结果

$$\int \log r\frac{\partial u}{\partial p}ds-\int u\frac{\partial \log r}{\partial p}ds=0,$$

因而根据假定也就是对整个属于它的圆弧部分有

$$\int ud\varphi+\log r\int\frac{\partial u}{\partial p}ds=0,$$

或者因为

$$\int\frac{\partial u}{\partial p}ds=0,$$

就有

$$\int ud\varphi=0,$$

而这是与我们假设 $u$ 在 $a$ 的内部为正是相矛盾的.

用类似的方式可以证明, 对在其中 $u$ 为负的面块 $b$, 在它的边界上方程 $u=0$ 和 $\frac{\partial u}{\partial p}=0$ 不可能成立.

如果现在在面 $T$ 上的一条曲线上有 $u=0$ 和 $\frac{\partial u}{\partial p}=0$, 而另一方面在它的某一部分上 $u$ 又异于零, 那么对这样一个面部分显然就有, 或是由这条曲线本身, 或

是由一块其上 $u=0$ 的面部分作它的边界, 因而归根结底是由一条满足 $u=0$ 和 $\frac{\partial u}{\partial p}=0$ 的曲线来作边界, 而这必定会导致与前面的假设相矛盾.

II. 如果沿一条曲线给定了 $u$ 和 $\frac{\partial u}{\partial p}$ 的值, 则 $u$ 由此就在 $T$ 的所有部分被确定下来了.

设 $u_1$ 和 $u_2$ 为两个确定的函数, 它们满足加在函数 $u$ 上的那些条件, 那么差 $u_1-u_2$ 也会满足这些条件, 这由将它们代入这些条件就立即可得出. 如果 $u_1$ 和 $u_2$, 包括它们对 $p$ 的一阶微商沿一曲线相等, 但在其他的面部分上则否, 那么就将会有, 在这条线上 $u_1-u_2=0$ 和 $\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial p}=0$, 但不能处处 =0, 这与定理 I 相违背.

III. 在 $T$ 内部的点上, 如果 $u$ 不是处处为常数, 则 $u$ 等于常数的那些点必定形成这样的曲线, 它把大于这个 $u$ 值的面块与小于这个 $u$ 值的面块分割开来.

这个定理由以下几点组成:

$u$ 不可能在 $T$ 的内部的一点上取极小或极大;

$u$ 不可能只在面的一部分上为常数;

在其上 $u=a$ 的曲线, 以它作为边界的两侧的面部分中, $u-a$ 不可能有相同的符号;

容易看出, 与这些定理相反的结论必定会导致上节所证明了的方程

$$u_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u d\varphi$$

或

$$\int_0^{2\pi}(u-u_0)d\varphi=0$$

遭受到破坏, 从而是不可能的.

**12.**

现在我们回过头来考察一个复变量 $w=u+vi$, 它一般来说 (即不排除有个别例外的线和点), 对面 $T$ 上的每一点具有一个确定的, 随其位置按照方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

连续改变的值, 并且按照先前的约定这样来表示 $w$ 的这个性质, 即我们把 $w$ 称为 $z=x+yi$ 的函数. 为了简化下面的叙述我们事先假定, $z$ 的函数在其值的变化过程中不会在个别点上出现不连续的情况.

我们暂时认定面 $T$ 是单连通的, 并且是单重覆盖在平面 $A$ 上的.

**引理** 如果一个 $z$ 的函数 $w$ 无论如何也不会沿整条曲线承受着连续性被中断, 并且进一步对面上每一个任意的点 $O'$, 设在这一点上 $z=z'$, 随着无限靠近点 $O$, $w(z-z')$ 将会无限小, 则它和它的所有微商必定在该面内的所有点上有限和连续.

对量 $w$ 的变化所作的假设, 如果令 $z-z'=\rho e^{\varphi i}$, 对在面 $T$ 的任一部分上的 $u$ 和 $v$, 可以分解为

1) $$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

和

2) $$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0;$$

3) 函数 $u$ 和 $v$ 不会在一条曲线上不连续;

4) 对每一点 $O'$, $\rho u$ 和 $\rho v$ 将随同该点到点 $O$ 的距离 $\rho$ 一同变为无限小;

5) 函数 $u$ 和 $v$ 的通过改变个别点处的值可以移去的不连续性均已排除.

由于假设 2), 3), 4), 对面 $T$ 上的任一部分, 沿其整个边界的积分

$$\int\left(u\frac{\partial x}{\partial s}-v\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds$$

根据 9 节, III $=0$, 因而沿任一条从 $O_0$ 到 $O$ 的曲线的积分

$$\int_{O_0}^{O}\left(u\frac{\partial x}{\partial s}-v\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds$$

(根据 9 节, IV) 都会取相同的值, 并由此, 在把 $O_0$ 设想为固定时, 形成一个 $x,y$ 的、在每一点上必定为连续的函数 $U$, 而且对它的微商有 (还是根据 5)), $\frac{\partial U}{\partial x}=u$ 以及 $\frac{\partial U}{\partial y}=-v$. 但是用它们代换 $u$ 和 $v$ 后, 假设 1), 3), 4) 就过渡为 10 节末的引理的条件. 从而函数 $U$ 包括它的全部微商在 $T$ 的所有点上都是有限和连续的, 并且因此这一点对复函数 $w=\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}i$ 及其对 $z$ 的微商也成立.

**13.**

现在我们来研究, 在保持 12 节中所作的那些假设之下, 再假定, 对面内的某一定点 $O'$, $(z-z')w=\rho e^{\varphi i}w$ 在点 $O$ 无限靠近时不变为无限小. 因此在这种情况下 $w$ 在点 $O$ 无限靠近 $O'$ 时将变为无穷大, 这时我们假设, 如果量 $w$ 不是保持与 $\frac{1}{\rho}$ 为同阶, 就是说二者的商逼近一有限的极限, 至少这两个量的阶也是相互成有限的比例, 从而使得有一个 $\rho$ 的幂, 它与 $w$ 的积在 $\rho$ 为无限小时, 或者为无限小, 或者保持为有限值. 如果 $\mu$ 是这样的幂的一个指数, $n$ 是接近它而大于它的整数, 那么量 $(z-z')^n w=\rho^n e^{n\varphi i}w$ 将随 $\rho$ 一起为无限小, 从而 $(z-z')^{n-1}w$ 作为 $z$ 的函数

$\left(\text{因为 } \dfrac{d(z-z')^{n-1}w}{dz} \text{ 与 } dz\text{无关}\right)$, 在面上的这一部分满足 12 节的那些假设, 从而在点 $O'$ 有限和连续. 如果我们用 $a_{n-1}$ 表它在点 $O'$ 的值, 那么 $(z-z')^{n-1}w - a_{n-1}$ 就是一个函数, 它在这点连续且 $=0$, 从而会随 $\rho$ 一起为无限小, 由此根据 12 节得出, $(z-z')^{n-2}w - \dfrac{a_{n-1}}{z-z'}$ 是点 $O'$ 处的一个连续函数. 通过连续使用这个方法, 显然可知, $w$ 在减去一个表达式

$$\frac{a_1}{z-z'} + \frac{a_2}{(z-z')^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{(z-z')^{n-1}}$$

后就变成一个在点 $O'$ 处保持有限和连续的函数.

因此如果在满足 12 节的假设条件下出现的变化是这样, 函数 $w$ 在 $O$ 向面 $T$ 内部的一点 $O'$ 无限逼近时变为无限大, 则这个无限大的阶数 (一个与距离成反比地增大的量看成是一个一阶的无限大), 当它有限时必定为整数; 而且如果这个数 $=m$, 则函数 $w$ 通过附加上一个含 $2m$ 个任意常数的函数后就可以变成在这一点 $O'$ 连续的函数.

注. 一个函数, 如果确定它的可能方式包括了一个一维的连续区域, 我们就把它看成是一个含有一个任意常数的函数.

## 14.

在 12 节和 13 节对面 $T$ 所作的限制不是本质的. 显然对任一面内的任意一点, 我们都可以用一面块把它包围起来, 它在那里具有所假设的性质, 唯一的例外就是该点为该面的支点时的情形.

为了研究这种情形, 我们设想面 $T$ 或它的一个面块, 含有一个 $(n-1)$ 阶的支点 $O'$, 设其上 $z = z' = x' + y'i$, 借助于函数 $\varsigma = (z-z')^{\frac{1}{n}}$ 把它映射到另一个平面 $\Lambda$ 上, 即我们设想用这个平面上的一个点 $\Theta$, 它的直角坐标为 $\xi, \eta$, 来代表函数 $\varsigma = \xi + \eta i$ 在 $O$ 点的值, 并把点 $\Theta$ 看成是点 $O$ 的像. 用这个办法我们就得到了在 $\Lambda$ 上铺开的一个连通面作为面 $T$ 上这一部分的像, 它在点 $O'$ 的像点 $\Theta'$ 上不再会有支点, 下面我们马上来证明这一点.

为了明确概念起见我们设想围绕着平面 $A$ 上的点 $O$, 以半径 $R$ 作一个圆, 并且平行 $x$ 轴作一条直径, 在其上 $z-z'$ 将取实值. 于是由这个圆割出去包围支点的面块后的面 $T$, 如果 $R$ 选得充分小, 就会在这条直径的两侧被分隔成 $n$ 块散开成半圆形的面块. 在直径的一侧, 如果 $y-y'$ 为正, 这一侧的面块我们就记为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 而在对着的另一侧上的面块就记为 $a'_1, a'_2, \cdots, a'_n$, 并且设想, 在 $z-z'$ 取负值时, 将 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 顺序地与 $a'_1, a'_2, \cdots, a'_n$ 连起来, 反之当 $z-z'$ 取正值时, 则顺序地与 $a'_n, a'_1, \cdots, a'_{n-1}$ 连接起来, 这样一来这样假设就显然可使得一个 (按所要求的方向) 绕点 $O'$ 转圈的点将依次经过面 $a_1, a'_1, a_2, a'_2, \cdots, a_n, a'_n$, 在经过 $a'_n$ 后又回到 $a_1$ 上来. 现在我们在这两个平面上都引入极坐标, 也就是令 $z - z' = \rho e^{\varphi i}, \varsigma = \sigma e^{\psi i}$, 并

且为了讨论 $a_1$ 面块的映射, 我们选 $(z-z')^{\frac{1}{n}}=\rho^{\frac{1}{n}}e^{\frac{\varphi}{n}i}$ 的那样一些值, 使得后一表达式满足设定 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, 于是对 $a_1$ 的所有点就有 $\sigma\leqslant R^{\frac{1}{n}}, 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{n}$; 这样一来它在平面 $\Lambda$ 的像就完全落在一个其极角从 $\psi=0$ 到 $\psi=\frac{\pi}{n}$, 半径为 $R^{\frac{1}{n}}$ 的圆形扇区内, 而且对 $a_1$ 上的每一个点都有这个扇区的一个唯一的, 且随之连续移动的点与之对应, 反之亦然, 由此得出, 面 $a_1$ 的映像是单重展布在这个扇区上的连通面. 用完全类似的方式可知面 $a_1'$ 是位于从 $\psi=\frac{\pi}{n}$ 到 $\psi=\frac{2\pi}{n}$ 的扇区的映像, $a_2$ 是从 $\psi=\frac{2\pi}{n}$ 到 $\psi=\frac{3\pi}{n}$ 的扇区的映像, 最后, 如果我们对这个面上的每一点选其 $\varphi$ 依次位于 $\pi$ 与 $2\pi$, $2\pi$ 与 $3\pi,\cdots,(2n-1)\pi$ 与 $2n\pi$ 之间, 而这总有一种方式且只有一种方式是可能的, 这时对 $a_n'$ 则是从 $\psi=\frac{2n-1}{n}\pi$ 到 $\psi=2\pi$ 的扇区的映像. 而这些扇区又按这个顺序相互连接, 就像 $a$ 和 $a'$ 的各个面一样, 更确切地说, 在这里相接触的点在那里对应的也是相接触的点; 因此它们就可以将那些面 $T$ 中包含点 $O'$ 的面块的映像拼接成一块连通的映像, 而且这个映像显然是在平面 $\Lambda$ 单重展布的.

一个变量, 如果它对每一点 $O$ 都有一确定的值, 那么它对 $\Theta$ 每一点也是这样, 反之亦然, 因为每一个 $O$ 只对应一个 $\Theta$, 每一个 $\Theta$ 也只对应一个 $O$; 如果进一步它还是 $z$ 的函数, 那么它也是 $\varsigma$ 的函数, 这是因为, 如果 $\frac{dw}{dz}$ 与 $dz$ 无关, 就会有 $\frac{dw}{d\varsigma}$ 与 $d\varsigma$ 无关, 而且反之亦然. 由此得知, 对所有 $w$ 对 $z$ 的函数, 如果把它们看成是 $(z-z')^{\frac{1}{n}}$ 的函数, 那么 12 节和 13 节中的定理也可以应用到支点 $O'$ 上. 这就给我们带来了下面的定理:

如果一个 $z$ 的函数 $w$ 在从 $O$ 向一个 $(n-1)$ 阶的支点 $O'$ 逼近的过程中变为无限大, 那么这个无限大量阶次必定等于距离的一个幂, 其指数为 $\frac{1}{n}$ 的倍数, 而且如果这个指数 $=-\frac{m}{n}$, 那么就能通过加上一个表达式

$$\frac{a_1}{(z-z')^{\frac{1}{n}}}+\frac{a_2}{(z-z')^{\frac{2}{n}}}+\cdots+\frac{a_m}{(z-z')^{\frac{m}{n}}},$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 为任意的复数, 变成在点 $O'$ 处的连续函数.

这个定理包含了下述结论作为它的一个推论, 这就是, 如果在点 $O$ 无限逼近点 $O'$ 时 $(z-z')^{\frac{1}{n}}w$ 变为无限小, 则函数 $w$ 在点 $O'$ 处连续.

## 15.

现在设想有一个 $z$ 的函数, 它对展布在 $A$ 上的任一面 $T$ 上的每一点 $O$ 都有一确定的值, 并且不是处处为常数, 用几何的语言来表述就是这样, 它在点 $O$ 的值 $w=u+vi$ 可以用平面 $B$ 上的一个其直角坐标为 $u,v$ 的点 $Q$ 来表示, 于是有以下结论:

I. 全部点 $Q$ 可以说构成一个面 $S$, 对它的每一个点有一个在 $T$ 中随之连续变动的点 $O$ 与之对应.

为了证明这一点, 显然只需要证明, 点 $Q$ 的位置总是会随点 $O$ 的位置变动 (甚至, 一般来讲, 随着作连续的变动). 这一点包含在下述定理之中:

一个 $z$ 的函数 $w=u+vi$, 如果它不是处处为常数, 就不可能沿一条线为常数.

**证** 设 $w$ 沿某一条曲线取值常数值 $a+bi$, 则对此曲线有 $u-a$ 以及 $\frac{\partial(u-a)}{\partial p}$, 它 $=-\frac{\partial v}{\partial s}$, 还有

$$\frac{\partial^2(u-a)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(u-a)}{\partial y^2}$$

处处 $=0$; 因此根据 11 节, I, 必定处处 $u-a$=0, 又由于

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

从而处处也有 $v-b=0$, 这与假设矛盾.

II. 由于在 I 中所作的假设, 面 $S$ 的面部分之间不可能是连通的, 如果它们在 $T$ 中对应部分不是连通的话; 反过来, 在 $T$ 中连通且 $w$ 为连续之处, 面 $S$ 就有相应的连通性.

这些假设相当于说, 与 $S$ 的边界相对应的, 一部分是 $T$ 的边界, 另一部分是不连续之处; 但是在面部分的内部, 除去个别的点外, 处处是单叶 (schlicht) 地覆盖在 $B$ 上的, 也就是说, 绝不会有撕开成相互叠在一起的面部分, 也绝不会发生折叠.

因为 $T$ 处处具有相应的连通性, 头一个结论只有在 $T$ 出现了撕开时才会发生, 这违反了假设; 后一个结论我们马上就来证明.

我们最先来证明, 在 $\frac{dw}{dz}$ 为有限之处的点 $Q'$ 不可能位于面 $S$ 的折叠之上.

实际上, 如果我们用面 $T$ 中形状任意, 大小不定的面块来包围与点 $Q'$ 对应的点 $O'$, 那么 (根据 3 节) 我们就一定能够将它的尺寸取得这样小, 使得 $S$ 的对应面部分与之相差很少, 从而是这样小, 使得它的边界在平面 $B$ 上割出包围着 $Q'$ 的一个面块. 但是如果 $Q'$ 位于面 $S$ 的折叠之上, 这就是不可能的.

作为 $z$ 的函数, 现在 $\frac{dw}{dz}$ 根据 I 只能在个别点上 =0, 而且由于 $w$ 在 $T$ 中所考察的点上连续, 只会在这个面的支点上变为无限大; 由于这些, 这正是要证明的.

III. 于是面 $S$ 就是这样的一个面, 对于它在 5 节对 $T$ 所作的那些假设也能适用; 在这个面内对每一点 $Q$ 未定量 $z$ 有一个确定的值, 它随 $Q$ 的位置这样连续地改变, 使得 $\frac{dz}{dw}$ 与位置改变的方向无关. 这样一来它就在用 $S$ 所描绘的量域中构造了一个在前面规定的意义下的、复变量 $w$ 随 $z$ 而变的连续函数.

由此还进一步得出:

设 $O'$ 与 $Q'$ 为面 $T$ 和 $S$ 上两个相互对应的点, 在该处有 $z=z', w=w'$, 如果它们中没有一个支点, 则在 $O$ 向 $O'$ 无限靠近时, $\frac{w-w'}{z-z'}$ 会逼近一个有限值, 而且映像就是在那里的一个在最小部分上的相似映像; 但是如果 $Q'$ 是一个 $(n-1)$ 阶

的支点, $O'$ 是一个 $(m-1)$ 阶的支点, 则在 $O$ 向 $O'$ 无限靠近时, $\dfrac{(w-w')^{\frac{1}{n}}}{(z-z')^{\frac{1}{m}}}$ 会逼近一个有限的极限, 而且在相互接触的面部分出现的映像类型很容易由 14 节给出.

## 16.

**引理**　设 $\alpha$ 和 $\beta$ 为两个 $x, y$ 的函数, 它们对任意地展布在 $A$ 上的面 $T$ 的所有部分的下述积分

$$\int\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right]dT$$

有有限值, 那么在改变 $\alpha$ 之下这个积分就得出了一个连续的, 或者只是在个别点上为不连续的函数, 它在边界上 $=0$, 对于这样的函数总有一个极小值, 如果我们通过改变个别点处的函数值排除掉可移去不连续性, 则只有一个这样的极小值.

我们用 $\lambda$ 表一未定的连续, 或还可能只在个别点上为不连续的函数, 它在边界上 $=0$, 并且对它展布在整个面上的下述积分

$$L=\int\left(\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2\right)dT$$

具有有限值, 再用 $\omega$ 表不定函数 $\alpha+\lambda$, 最后用 $\Omega$ 表展布在整个面上的下述积分

$$\int\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right]dT$$

函数 $\lambda$ 的全体构成一个连通闭域, 就是说, 每一个这样的函数连续地过渡到另一个这样的函数, 但是不可能无限逼近一个沿一条曲线不连续的函数, 除非 $L$ 为无限 (17 节); 这样对任一 $\lambda$, 令 $\omega=\alpha+\lambda, \Omega$ 取有限值, 这个值将随 $\lambda$ 的形状连续改变, 并随 $L$ 同时变为无限, 但决不会降到零之下; 从而 $\Omega$ 至少对函数 $\omega$ 的某个形状会取极小.

为了证明我们的定理的第二部分, 设 $u$ 为 $\omega$ 的一个函数, 它使 $\Omega$ 取极小值, $h$ 为在整个面上某个常量, 它使得 $u+h\lambda$ 满足前面对函数 $\omega$ 所加的条件. 对 $\omega=u+h\lambda, \Omega$ 将取值为

$$\begin{aligned}&\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right]dT\\&+2h\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right]dT\\&+h^2\int\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2\right]dT\\=&\,M+2Nh+Lh^2,\end{aligned}$$

于是只要 $h$ 取得充分小, (根据极小的概念) 对任意的 $\lambda$ 它都必定会大于 $M$. 但是这就要求对任意 $\lambda$ 有 $N$=0; 因为否则的话, 在 $h$ 与 $N$ 的符号相反, 而且在不计符号时假设有 $< \frac{2N}{L}$, 则下式

$$2Nh + Lh^2 = Lh^2\left(1 + \frac{2N}{Lh}\right)$$

就会取负值. 令 $\omega = u + \lambda$, 在这种形式下它显然可以取到 $\omega$ 的所包含的所有值, 因此 $\Omega$ 对它的值将 $= M + L$, 由于 $L$ 实质上为正, 从而没有一个函数 $\omega$ 的形状能使 $\Omega$ 对它所取的值小于对 $\omega = u$ 所取的值.

如果我们现在对 $\omega$ 的另一个函数 $u'$ 求得了另一个在 $\Omega$ 上的极小值 $M'$, 那么上面的结论对它也适用, 于是有 $M' \leqslant M$ 以及 $M \leqslant M'$, 从而 $M = M'$. 但是如果把 $u'$ 写成 $u + \lambda'$ 的形式, 则我们就得到 $M'$ 的表达式为 $M + L'$, 其中 $L'$ 表 $L$ 在 $\lambda = \lambda'$ 时所取的值, 而方程 $M = M'$ 就给出 $L'$=0. 这只有在所有的面部分上有

$$\frac{\partial \lambda'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \lambda'}{\partial y} = 0$$

时才有可能, 因此, 只要 $\lambda'$ 还连续, 这个函数就必定是一个常数, 并且由于它在边界上 $= 0$, 而且不会沿一条曲线发生不连续, 从而最多只能在个别点上有异于零的值. 因此, 两个 $\omega$ 函数, 如果它们都赋予 $\Omega$ 一极小, 只能在个别点上相互有差异, 如果在函数 $u$ 中通过改变个别点处的值消除可以去的不连续性, 这个函数就完全确定了.

## 17.

现在我们事后来补充证明, 在 $\lambda$ 能无限逼近一沿一条曲线不连续的函数 $\gamma$ 的情况下, $L$ 的有限性将受到损害, 就是说, 如果函数 $\lambda$ 满足这样的条件, 它在一个包围间断曲线的面部分 $T'$ 之外与 $\gamma$ 一致, 那么我们总可以将 $T'$ 取得如此之小, 以致 $L$ 必定会大于一个任意给定的量 $C$.

我们在通常的意义下关于不连续曲线取其 $s$ 和 $p$, 对不定的 $s$ 我们用 $\kappa$ 表曲率, 当凸向正 $p$ 一侧时视为正, $p$ 在 $T'$ 的边界正侧的值用 $p_1$ 表示, 在负侧的值用 $p_2$ 表示, $\gamma$ 相应的值分别用 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 表示. 现在我们来考察这条曲线上任一连续弯曲的一段, 则 $T'$ 中包含在其两端点的法线之间的部分, 如果尚未扩展到曲率中心, 则对 $L$ 的贡献为

$$\int ds \int_{p_2}^{p_1} (1 - \kappa p)\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial s}\right)^2 \frac{1}{(1-\kappa p)^2}\right] dp,$$

这个表达式的最小值为

$$\int_{p_2}^{p_1} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial p}\right)^2 (1 - \kappa p) dp,$$

但是在 $\lambda$ 的两个固定的边界值为 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 时, 根据众所周知的规则求得

$$= \frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2\kappa}{\log(1-\kappa p_2)-\log(1-\kappa p_1)},$$

从而, 即使设 $\lambda$ 在 $T'$ 的内部, 该值也必定会

$$> \int \frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2\kappa ds}{\log(1-\kappa p_2)-\log(1-\kappa p_1)}.$$

如果 $(\gamma_1-\gamma_2)^2$ 对 $\pi_1>p_1>0$ 和 $\pi_2<p_2<0$ 所取得的最大值随 $\pi_1-\pi_2$ 一道变为无限小, 则函数 $\gamma$ 在 $p=0$ 处为连续; 于是对 $s$ 的任一值总可以取这样的一个有限量 $m$, 使得, 不管 $\pi_1-\pi_2$ 取得如何小, 总是会包含在通过 $\pi_1>p_1\geqslant 0$ 和 $\pi_2<p_2\leqslant 0$ (其中等式是相互排斥的) 所表达的 $p_1$ 和 $p_2$ 的边界值之内, 对于它有 $(\gamma_1-\gamma_2)^2>m$. 我们再在先前的限制下设 $T'$ 取任何形状, 这时我们给 $p_1$ 和 $p_2$ 以确定的值 $P_1$ 和 $P_2$, 并用 $a$ 来表示在不连续曲线上沿所考察的部分的下述积分的值

$$\int \frac{m\kappa ds}{\log(1-\kappa P_2)-\log(1-\kappa P_1)},$$

这样显然我们能使

$$\int \frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2\kappa ds}{\log(1-\kappa p_2)-\log(1-\kappa p_1)} > C,$$

办法就是, 对于 $s$ 任一值我们这样来取 $p_1$ 和 $p_2$ 的值, 使得下述不等式

$$p_1 < \frac{1-(1-\kappa P_1)^{\frac{a}{C}}}{\kappa},\quad p_2 > \frac{1-(1-\kappa P_2)^{\frac{a}{C}}}{\kappa},\quad \text{以及}\quad (\gamma_1-\gamma_2)^2>m$$

能够成立. 但是这会带来这样的结果, 就是, 即使将 $\lambda$ 取在 $T'$ 之内, 那从对 $T'$ 的所考察的面块所得出的 $L$ 部分就会因此使得 $L$ 本身 $>C$, 这正是要证明的.

## 18.

根据 16 节我们已经对在那里规定函数 $u$ 以及一个任意的函数 $\lambda$ 证明了下述展布在整个面 $T$ 上的积分

$$N = \int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right]dT=0.$$

现在我们要从这个方程导出进一步的结论.

如果我们从面 $T$ 上割出包围 $u,\beta,\lambda$ 的不连续之处的面块 $T'$, 那么在从余下的面块 $T''$ 得出的 $N$ 的部分, 借助一 7 节, 8 节, 当将其中的 $X$ 代之以 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)\lambda$, $Y$ 代之以 $\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)\lambda$ 后, 就求得为

$$-\int\lambda\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dT-\int\left(\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{\partial\beta}{\partial s}\right)\lambda ds.$$

由于加在函数 $\lambda$ 上的边界条件, 在相对于与 $T$ 有公共边界块的 $T''$ 部分上的下述积分

$$\int \left(\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{\partial \beta}{\partial s}\right)\lambda ds$$

等于 0, 于是 $N$ 就可以看成是由两部分组合成的, 一部分为对 $T''$ 的下述积分

$$-\int \lambda\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dT,$$

另一部分为对 $T'$ 下述积分

$$\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right]dT+\int\left(\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{\partial \beta}{\partial s}\right)\lambda ds.$$

现在显然可知, 如果在面 $T$ 的某一部分上 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 异于零, 那么 $N$ 同样地也可以得到异于零的值, 只要我们现在选 $\lambda$, 它现在还可以自由选取, 在 $T'$ 内等于 0, 而在 $T''$ 则这样来选取, 使得 $\lambda\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ 处处有相同的符号. 但是如果 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 在 $T$ 的全部上面都 $=0$, 那么对任意 $\lambda$, 由 $T''$ 对 $N$ 的贡献部分也会等于零, 于是条件 $N=0$ 就会得出, 在不连续处所贡献的部分会 $=0$.

这样一来, 对于函数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial \beta}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial \beta}{\partial x}$, 如果我们令前者 $=X$, 后者 $=Y$, 一般来说, 我们不仅有方程

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0,$$

而且沿 $T$ 的任一部分的全部边界的下述积分也会有

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds=0,$$

只要这个表达式通常还有一个确定的值的话.

这样, 如果面 $T$ 是多连通的话, (根据 9 节, V) 用横割线把它剖分为单连通的 $T^*$, 则下述积分

$$-\int_{O_0}^{O}\left(\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{\partial \beta}{\partial s}\right)ds$$

对在 $T^*$ 内任意一条从 $O_0$ 到 $O$ 的曲线都有相同的值, 因而, 将 $O_0$ 看成是固定时, 它就构成一个 $x, y$ 的函数, 它在 $T^*$ 内处处连续, 并且沿割线的两侧有相同的变化. 把这个函数 $\nu$ 加到 $\beta$ 上去, 给我们提供了一个函数 $v=\beta+\nu$, 它的微商有 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 以及 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

于是我们有下述

**引理** 如果一连通面 $T$ 由横割线剖分成单连通的 $T^*$, 在其上给定了一个 $x, y$ 的复函数 $\alpha+\beta i$, 它展布在整个面上的下述积分

$$\int\left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}-\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}+\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2\right] dT$$

有有限值, 则它总能, 也只能以一种方式, 通过附加一个 $x, y$ 的函数 $\mu+\nu i$, 变成 $z$ 的函数, 这个函数 $\mu+\nu i$ 满足下述条件:

1) $\mu$ 在边界上 $=0$, 或者只在其上的个别点上异于零, $\nu$ 在一点上任意给定.

2) $\mu$ 在 $T$ 中以及 $\nu$ 在 $T^*$ 中的变化只在个别点上不连续, 而且只是这样不连续, 使得展布在整个面上的下述积分

$$\int\left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)^2\right] dT \quad \text{以及} \quad \int\left[\left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \nu}{\partial y}\right)^2\right] dT$$

取有限值, 而且后者沿割线两侧相等.

以上条件足以确定 $\mu+\nu i$, 这一点可由下面得出, 因为 $\nu$ 可由 $\mu$ 确定到只差一个附加的常数, 而 $\mu$ 总是同时会使积分 $\Omega$ 取极小, 因为如果令 $u=\alpha+\mu$, 显然对任一 $\lambda$ 会有 $N=0$; 根据 16 节这是一个只有一个函数才能具有的性质.

## 19.

作为上一节末所述引理的基础的原理, 开辟了研究 (与其具体表达式无关) 单个复变量的*确定的*函数之路.

为了了解这个领域需要大致估计一下为确定在给定变量域内的这样一个函数所需条件的数量.

首先我们只限于一个确定的情形, 如果展布在 $A$ 上的一个面, 变量域就是用它来描述的, 是单连通的, 这样 $z$ 的函数 $w=u+vi$ 就可以按照下面的条件来确定:

1) $u$ 在边界的所有点上的值给定, 它们在位置的无限小的改变下改变一个相同阶次的无限小量, 但在其他情况下可以随意改变.[1]

2) $v$ 在任一点的值可以随意给定.

3) 函数在所有点上应有限和连续.

但是通过这些条件它就完全确定下来了.

实际上这一点可以从上一节的引理导出, 如果我们这样来确定 $\alpha+\beta i$, 而这总是可能的, 让 $\alpha$ 在边界上等于给定的值, 而在整个面上对任一位置的无限小的变动, $\alpha+\beta i$ 的改变为同阶无限小.

[1] 对这些值的变化本身只限制它不要沿边界部分发生不连续; 只有在避免在此引起不必要的麻烦时才会作进一步的限制.

因此, 一般来讲, $u$ 在边界上作为 $s$ 的完全任意的函数给定, 并且 $v$ 由此随之处处确定; 但是反过来也可以在边界上每一点任意给定 $v$, 于是 $u$ 的值由此随之确定. 因此 $w$ 在边界点上的值的选择的活动空间在每一边界点上就包括了一个一维流形, 而完全确定它就需要在每一边界点上有一个方程, 这方面目前还不要紧, 使得每一个这样的方程只涉及在边界点上的一项的值. 也可以这样来完成这一确定, 就是对每一边界点给定一个随其位置连续改变其形式的, 含两项 (原文 Gleider, 疑是 Glieder) 的方程, 或者对边界的多个部分同时做到, 对其中一个部分的每一点令 $n-1$ 个确定点, 而对其余部分每一个则令一个确定的点与之对应, 并且对每 $n$ 个这样的点共同给以 $n$ 个随其位置连续改变的方程. 但是这些条件, 它们的总体构成一个连续流形, 并且由任意函数之间的方程来表达, 为了能够而且足够确定一个在量的变化区域内处处的连续函数, 一般来说, 还需要再补充一个用一些单独的方程 —— 对任意常数的方程 —— 来表达的限制, 就是这样到现在为止我们估计的精确性还没有谈到.

对那种量 $z$ 的变化域由一多连通面来表示的情形, 以上的研究不必作实质的改变, 这就是应用 18 节的引理可以得到直至越过横割线所产生的变化, 就像刚才处理的函数一样, 如果边界条件所含的可供支配的常数个数等于横割线的数目, 这种变化就可令它 $=0$.

在内部有一条线上失去了连续性的情况, 如果把这条线看成是面的割线, 也就属于前面那种情况.

最后如果允许在一单个的点上违反连续性, 因而根据 12 节就可能有函数的趋向无限大, 那么在对此点保持平常在我们的最初情况所作的假设之下, 我们就能够任意给定一个 $z$ 的函数, 只要我们要确定的函数在减去它之后就会是连续的; 但是由此它就完全确定了. 然后我们令量 $\alpha+\beta i$ 在一个围绕该不连续点所画的任意小的圆上等于这个给定的函数, 但在其余地方则等于先前所规定的, 则沿这个圆的下述积分

$$\int\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right]dT$$

会 $=0$, 沿其余部分的积分等于一个有限量, 因此我们可以将上一节的引理应用上去, 由此得到一个具有我们所期望的性质的函数. 于是我们借助 13 节中的几个引理就可推知, 在一般情况下, 如果函数在一个单独的不连续点处变为无限大的阶次为 $n$, 则可供支配的常数的个数为 $2n$.

几何地来表述就是 (按照 15 节), 一个在一给定的二维量域内变化的复变量 $z$ 的函数 $w$, 从一个覆盖一给定 $A$ 的面 $T$ (在其一个最小部分挖去个别的点) 得出类似的覆盖 $B$ 的像 $S$. 这些条件是作为确定函数的充分而又必要的条件来求得的, 涉及的是它们在边界上的值, 或是在不连续点处的值; 因此它们全都好像是 (15 节) $S$ 的边界位置的条件, 也就是说, 它们为每一个边界点给出了一个条件方程. 既然

每一个这样的方程只涉及一个边界点, 所以它们要用一族曲线来表示, 由它们来为每一个边界点生成一个几何位置. 如果两个相互连续错开的边界点共同接受两个条件方程, 那么就会在这两个边界部分之间出现一个关系, 使得其中一个实际上被规定之后, 另一个也就随之定下来了. 类似的方式也会为另一种形式条件方程给出其几何解释, 我们不能在此进一步谈下去了.

## 20.

在数学中引进复数量的原因及其最切近的目的就在用简单[1] 量的运算所表达的变量间相互关联的规律理论之中. 特别是, 如果我们把这些规律应用于一个扩大了的范围内, 即对它们所涉及的变量给以复数值, 那么一种以往是隐藏着的和谐与规律性就会显现出来. 发生这种现象的情况直至现在还才只包括一个小小的领域 —— 它几乎全都可以归结到两个变量之间的那样一种相互关联规律, 其中要么一个变量是另一个的代数[2] 函数, 要么是这样一种函数, 它的微商是个代数函数 —— 但是在这里所作的几乎每一步不仅给那些未用复变量所得的结果一个更简单、更完整的形式, 而且还为新的发现开辟了道路, 这方面对代数函数, 圆函数或者指数函数, 椭圆及 Abel 函数的研究的历史就是明证.

下面将简短地提示一下, 通过我们对这种函数的研究得到了一些什么样结果.

至今为止对这种函数的研究方法都是以一个表达式作为定义为基础, 这个表达式对它的自变量每一个值得出这个函数的一个值; 通过我们的研究证明, 由于单个复变量函数的一般特性, 在这种定义中定义面块 (Bestimmungsstücke) 中有一部分面块上的规定是其余部分定义面块的推论, 而且定义面块的范围可缩小到为确定所必需. 这大大地简化了处理. 例如为了证明同一函数的两个表达式的相等, 以往我们就要将一个表达式转变成另一个表达式, 这也就是要证明, 对自变量每一个值二者均一致; 现在只要证明它们在一个远小得多的范围内一致就足够了.

在这里所提供的基础上建立起来的这种函数的理论, 可以以一种与用量的运算的确定方式无关地来确定函数的性状 (Gestaltung) (即它对自变量每一个值所取的值), 这样对单个复变量函数的一般概念来说, 为了确定函数只需补上必要的特征就可以了, 然后就可以过渡到这个函数能够具有的各种不同的表达式. 通过相似的量的运算所表出的一类函数, 它们的共同特征于是就用加在它们身上的边界条件和间断条件来描述. 例如, 如果量 $z$ 的变动区域是展布在整个无限平面 $A$ 上的一个单连通或多连通域, 而且函数在其中只允许在个别点上不连续, 确切地讲是阶次为有限的无限大 (即对一个无限大的 $z$, 就是这个量本身, 但对每一个有限的值 $z'$ 则为

[1] 我们在这里把加和减, 乘和除, 微分和积分都看成是初等运算, 并且如果一个相互关联的规律能用更少的初等运算来确定, 就说是更加简单一些. 实际上到目前为止在分析中所用到的函数都可以用有限个这样的运算来定义.

[2] 即这时在二者之间会有一个代数方程.

$\frac{1}{z-z'}$, 这时就把它说成是一阶无限大量), 那么这个函数必定是代数函数, 反之每一个代数函数也必定满足这个条件.

这个理论, 如我们已经指出的, 容易由阐明量的运算所决定的相互依赖关系来确定, 我们不打算现在来详细阐述它, 因为我们暂时还不研究函数的表达式.

出于同样的理由我们也不打算在这里去涉及我们的定理可应用于阐述这个相互关系规律的一般理论的基础价值, 为此需要证明, 这里作为单复变量函数的基本概念与可以用量的运算来表达相互依赖关系[1] 完全一致.

## 21.

我们还要用一个详尽的例子来说明应用我们的一般定理的好处.

在上一节所指出的它的应用, 尽管是在研究一开始就提出来的, 还只是一个特例. 因为如果这种相互依赖关系是由有限个在那里被看成是基本运算的量的运算所决定, 所以函数只能含有限个参数, 而这对于足以确定函数的一组相互无关的边界条件和间断条件就有这样的后果, 就是在这种情况下想要用沿一条曲线在其每一点上随意地给定值来给出这种条件根本不可能. 因此对我们的目的来说比较适合的是, 不去从那里所取的例子中去选, 而宁愿选这样的例子, 其中复变量的函数依赖于一个任意的函数.

为了直观地说明和易于理解起见, 我们给它以在 19 节末所采用过的几何包装. 于是这就好像是研究这样一种可能性, 即提供已给面的一个连通的、在最小部分与之相似的映像, 这个形状为已给, 因而用上面的形式来表达就是, 对映像的每一个边界点, 确切地说对所有这种点, 给出一条正规曲线 (Ordscurve), 而且除此之外 (15 节) 边界的定向及其支点也已给定. 我们限于在下面的情况下来求解这个问题, 这时一个面的每一个点只对应另一个面的一个点, 并且这个面是单连通的, 在这种情况下它的解包含在下面的引理中.

两个给定的单连通平面总可以这样来互相关联, 使得对其中一个面的每一点总可以与另一个面上随之一同连续地移动的一个点相对应, 而且它们的对应在极小部分相似; 确切地讲就是, 有一个内点和一个边界点相对应的点可以任意给定; 但随之对所有的点这个关系就确定下来了.

如果两个面 $T$ 和 $R$ 都与第三个面 $S$ 这样相互关联, 使得在对应的最小部分相似, 那么由此得出在面 $T$ 和 $R$ 之间的一个对应, 它显然也有这个性质. 使两个任意的面这样来相互关联, 其对应的极小部分之间有相似性, 这个问题现在就归结为, 将任一面通过一个确定的保持极小部分相似的方式作映射. 这样一来, 如果我们在平面 $B$ 上围绕着 $w=0$ 的点以半径 1 画一个圆 $K$, 则为了阐明我们的引理就只需

[1] 我们把这种关系理解为任何一个可以有限次或无限次地用四个最简单的计算操作, 加和减, 乘和除, 表达出来的关系. 量的运算表达式 (与数的运算不同) 是指这样一种计算操作, 这时不用考虑量的可公度性.

要证明: 一块覆盖在 $A$ 上的任意的单连通面 $T$ 总可以单连通地并且在极小部分相似地映射到这个圆 $K$ 上, 而且, 使得圆心对应于一个任意给定的点 $O_0$, 圆周上的一个任意给定点对应于面 $T$ 的边界上的一个任意给定的点 $O'$, 以这样的方式映射只能有一种.

我们这样来约定用 $z, Q$ 表点 $O_0$, 用适当的下标后来表 $O'$, 并且在 $T$ 中围绕 $O_0$ 以它为中心画一个任意的圆 $\Theta$, 它不会伸到 $T$ 的边界上, 也不会包含支点. 如果引入极坐标, 即令 $z - z_0 = re^{\varphi i}$, 那么这时就会有函数 $\log(z - z_0) = \log r + \varphi i$. 因此它的实部的值在整个圆上连续变化, 只有点 $O_0$ 除外, 它在那里变为无限大. 但是它的虚部, 如果我们将 $\varphi$ 可能取的值处处最小都选为正, 沿着 $(z - z_0)$ 取实值的半径, 在其一侧选其值为 0, 在其另一侧选其值为 $2\pi$, 但是接着在所有的其余点就连续改变. 显然这条半径可设为从中心引向圆周的任意一条直线 $l$, 从而函数 $\log(z - z_0)$ 在点 $O$ 从这条线的负侧 (根据 8 节即指该处 $p$ 为负值) 越过此线到它的正侧时会承受一个 $2\pi$ 的突然减小, 但在其余情况下就会随它在整个圆 $\Theta$ 内的位置连续变化. 如果现在我们令 $x, y$ 的函数 $\alpha + \beta i$ 在圆 $\Theta$ 内 $=\log(z - z_0)$, 但是在它的外面, 在我们将 $l$ 任意延伸直到边界的过程中, 我们这样来规定, 使得它

1) 在 $\Theta$ 的周边上令它 $=\log(z - z_0)$, 在 $T$ 的边界上为纯虚数,

2) 在从直线 $l$ 的负侧越过它到正侧的过程中, 改变一个 $-2\pi i$, 但在平常的情况下则对每一无限小的位置变动下会有相同数量级的无限小量的改变. 而这总是可能的, 于是我们得到下述积分式

$$\int \left[ \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 \right] dT$$

展布在 $\Theta$ 上的积分值为零, 展布在其余部分上的积分为一个有限值. 于是就可通过加上一个只余一个纯虚的常数不定的 $x, y$ 的连续函数, 它在边界上为纯虚数, 把 $\alpha + \beta i$ 变成一个 $z$ 的函数 $t = m + ni$. 这个函数的实部 $m$ 在边界上 $= 0$, 在点 $O_0 = -\infty$, 而在 $T$ 的整个其余部分则连续变化. 因此对于 $m$ 在从 0 到 $-\infty$ 的每一个值 $a, T$ 被 $m = a$ 的直线分割成两部分, 其中一部分 $m < a$, $O_0$ 包含在其中, 另一部分 $m > a$, 它的边界则一部分由 $T$ 的边界, 一部分由直线 $m = a$, 共同组成. 面 $T$ 的连通次数经此分割, 或者不会改变, 或者会降低, 因为这个面的次数 $= -1$, 因此它或者会分割为连通次数为 0 和 $-1$ 的两块. 或者分割成比二多的块数. 但后者是不可能的, 因为那样的话在这些块中至少有一块, $m$ 在其中处处有限和连续, 而且在所有的边界上必定为常数, 因而或者必定会在一个面部分上为常数, 或者会在某个部分 —— 在某个点或沿某一条线 —— 上会取到极大或极小值, 与 11 节, III 相抵触. 因而 $m$ 为常数的那些点就形成一条闭合曲线, 它围成包含着点 $O_0$ 的面块, 而且 $m$ 向内下降到必要的值, 由此得出, 只要 $n$ 是连续的, 在顺着正向转 (这时按 8 节 $s$ 增大) 时它总是增大, 而且它只有在从直线的负侧越过直线到其正侧时才会

有一个 $-2\pi$ 的突变[1], 在 0 到 $2\pi$ 之间的每一个值一旦忽略去 $2\pi$ 的一个倍数就会相等. 如果现在我们令 $e^t = w$, 则 $e^m$ 和 $n$ 就是点 $Q$ 相对于以圆 $K$ 的中心为原点的极坐标. 于是点 $Q$ 的全体就构成处处为单重地展布在 $K$ 上的面 $S$; 其点 $Q_0$ 与圆的中心重合; 但是点 $Q'$ 可以利用在 $n$ 中尚待规定的常数移到圆周任意给定的点上, 这正是要证明的.

在点 $O_0$ 为一个 $(n-1)$ 阶支点的情形时, 只要将 $\log(z-z_0)$ 换成 $\frac{1}{n}\log(z-z_0)$, 就可以用完全相同的推导方法达到目的, 它的进一步的叙述很容易用 14 节的所述来完成.

**22.**

我们不打算在这里来全面阐述在本文中所研究对象的一般情形, 其中一个面中的一个点对应于另一个面的多个点, 而且不假设有单连通性, 这尤其是因为从几何观点来理解, 我们的整个研究已经达到了一个一般的形态. 局限于除去个别点外为单叶面的平面之上的限制对此也并不重要; 相反它许可对这样的问题, 即将一个任意给定的面以保持极小部分相似的方式映射到另一个任意给定的面上去, 作完全相同的处理. 我们在此满足于提出两篇 Gauß 的论文, 一篇是在 3 节中引用过的, 另一篇是他的曲面一般理论中的 13 节.

# 内 容 提 要[2]

1. 一个复变量 $w = u + vi$, 如果它随另一个变量 $z = x + yi$ 这样变化, 使得 $\frac{dw}{dz}$ 与 $dz$ 无关, 我们就说 $w$ 是 $z$ 的函数. 这个定义的根据是, 如果量 $w$ 对 $z$ 的依赖关系是用解析表达式给出的话, 这种情况就总会出现.

2. 复变量 $z$ 和 $w$ 的值用两个平面 $A$ 和 $B$ 上的点 $O$ 和 $Q$ 来描述, 它们的相互依赖关系看成是一个平面到另一个平面上的映射.

3. 如果这样一个依赖关系 (1 节) 有 $\frac{dw}{dz}$ 与 $dz$ 无关, 那么在原平面与其像之间在极小部分相似.

4. $\frac{dw}{dz}$ 与 $dz$ 无关的条件是, 有下述恒等式成立: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. 由它们就推得 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$.

5. 我们将用展布在 $A$ 上的一块有限的面 $T$ 来代替 $A$ 作为点 $O$ 的位置所在的地方. 这个面的支点.

[1] 因为直线 $l$ 是从位于面块内的一个点连到外面的一个点, 所以当它多次与边界相交时, 从内走向外就会比从外走向内多一次, 由此当顺正向转动时 $n$ 的突变之和总是会 $= -2\pi$.

[2] [这份内容提要几乎完全源于 Riemann 本人.]

6. 论一块面的连通性.

7. 如果 $X$ 和 $Y$ 是在 $T$ 的所有点上 $x$ 和 $y$ 的连续函数, 则展布在整个 $T$ 上的积分 $\int\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dT$ 等于沿它的整个边界的积分 $-\int(X\cos\xi+Y\cos\eta)\,ds$.

8. 引进点 $O$ 关于任一曲线的坐标 $s$ 和 $p$. $ds$ 与 $dp$ 的正负号的相对关系要使得有, $\frac{\partial x}{\partial s}=\frac{\partial y}{\partial p}$.

9. 当在这个平面上有

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0$$

时, 7 节中定理的应用.

10. 在单重地覆盖 $A$ 的面 $T$ 中的函数 $u$, 一般来说, 满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 且其所有微商处处有限和连续的条件.

11. 这样一种函数的性质.

12. 在单重地覆盖 $A$ 的单连通面 $T$ 中 $z$ 的一个函数 $w$, 连同其所有的微商处处有限和连续的条件.

13. 这样一个函数在一个内点上的不连续性.

14. 将 12 节和 13 节的定理推广到一任意平面的内点上.

15. 从展布在平面 $A$ 中的面 $T$ 到展布在平面 $B$ 中的面 $S$ 上的映射, 用它来几何地描述 $z$ 的一个函数 $w$ 的值, 它的一般性质.

16. 展布在整个面上的积分 $\int\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right]dT$, 通过改变 $\alpha$ 我们就得到一个连续函数或者在个别点上为不连续的函数, 它在边界上 $=0$, 总会在一个点上取到一极小值, 而且通过改变个别点处的值除去可移去间断点后, 就只有一个这样的点.

17. 用极限的方法建立上一节预先提出的定理的基础.

18. 如果在一通过横割线能分割成单连通面 $T^*$ 的、任意的连通平面 $T$ 上, 给定了一个 $x,y$ 的函数 $\alpha+\beta i$, 对于它展布在整个面上的下述积分

$$\int\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right]dT$$

为有限, 那么总有一种方式, 也只有一种方式通过加上一个 $x,y$ 的函数 $\mu+\nu i$, 变成一个 $z$ 的函数, 这个函数 $\mu+\nu i$ 由以下条件来确定; 1) $\mu$ 在边界上 $=0$, $\nu$ 在一点给定. 2) $\mu$ 在 $T$ 内以及 $\nu$ 在 $T^*$ 内的改变只是在个别点上不连续, 而且只是这样地不连续, 使得在整个面上的下述积分 $\int\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)^2\right]dT$ 与 $\int\left[\left(\frac{\partial\nu}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\nu}{\partial y}\right)^2\right]dT$ 保持为有限, 而且后者在割线的两侧相等.

19. 确定在一给定量域内变化的复变量的函数充分必要条件的粗略评估.

20. 以前通过量的运算来确定函数的方式包含了多余的部分. 通过在这里所作的研究把确定一个函数的确定要素返回到必要的程度.

21. 两个给定的单连通面总可以做到这样来使之相互关联, 使得其中一个的任意一个点能与另一个中的随之共同连续移动的点相对应, 并且对应的极小部分之间相似; 而且对其中的一个面的内点和一个边界点的对应点可以任意给定. 这样其他点的对应关系就完全确定下来了.

22. 结束语.

# 附录 III

# 论奠定几何学基础之假设

(选自 Göttingen 王室科学协会文集第十三卷)*

Bernhard Riemann

## 研 究 计 划

众所周知, 几何学把空间的概念以及在空间中作图的基本规则这二者都预设为某种给定了的东西. 它给出它们的定义只是名义上的, 而其实质的规定则是以公理的形式出现. 从而这些预设 (Voraussetzung)[1] 的关系仍然处于黑暗之中; 人们既看不清楚, 它们的联系是否和在何种程度上是必须的, 也不能先验地知道它们是否可能.

即使是从 Euklid 到 Legendre, 把现代那些最有名的几何革新家都算上, 无论是数学家, 还是投身于此的哲学家, 都未能使这一黑暗得到澄清. 其原因很可能就在于, 多重延伸量 (mehrfach ausgedehnter Grössen) 的一般概念, 空间量 (Raumgrössen) 就包含于其中, 仍然还没有研究出来. 因此我给自己首先就提出这样的任务, 从一般的量的概念来构造一多重延伸量的概念. 由此得出, 一多重延伸量可以有不同种类的度量关系, 因而空间只不过是三重延伸量的一个特殊情形. 但是由此就有一个必然的结论, 这就是, 几何学的命题不可能由一般量的概念推导出来, 相反, 那些把空间与其他可以想象得到的三重延伸量区分开来的性质只能从经验中来获得. 于是就引出了这样一个问题, 寻求那种足以规定空间度量关系的最简单的事实 —— 根据这个事情的本质, 这是一个不能完全确定的问题; 因为允许有多组简单事实, 它们都足以用来规定空间的度量关系; 对当下的目的来说最重要的就是 Euklid 奠定基础的那一组. 这组事实, 和其他事实一样, 不是必然的, 但从经验上是肯定的, 它们是假设 (Hypothesen); 因此对其可能性人们是可以研究的, 虽然在观察的范围内

* 本文曾由 Riemann 于 1854 年 7 月 10 日在 Göttingen 大学哲学系专门为他的就职而安排的报告会上宣读过. 这就说明了它的表述形式, 在其中解析的研究只能是点到即止; 人们可以在他的应征巴黎悬赏问题的论文中找到一些关于这方面的论述和若干相关注释.

[1] Voraussetzungen 一般译为假设, 此处为了与 Hypothese 区别起见, 译为预设. —— 中译者注

这一可能性是很大的, 并进而由此探索将它们扩展到观察的范围之外, 既向无限大的方面扩展, 又向无限小的方面扩展的可能性.

## I. $n$ 重延伸量的概念

当我现在来探讨这些问题中的第一个、建立多重延伸量的概念的问题之时, 我想应该允许我要求批评有更多一些的宽容, 因为我在哲学性质的一类研究工作做得很少, 其中的困难更多地是在概念上, 而不是在构造上, 而且除了从枢密顾问 Gauß 先生在他的第二篇论双二次余式的论文, 在 Göttingenschen gelehrten Anzeigen (Göttingen 学术通报), 以及在他的五十周岁纪念册得到就此所作的一些非常简短的提示, 再就是从 Herbart 的一些哲学研究得到点提示之外, 我再无其他前期工作可资利用.

### 1.

量的概念, 只有此前存在更一般的概念并且许可有不同的具体确定方式 (Bestimmungsweise)[1] 时, 才有可能来谈. 按照在这些具体确定方式从其中一个到另一个的过渡是连续或否, 它们形成一连续流形或一离散的流形; 在前一种情况下这些个别的确定方式就叫做点, 在后一种情况下就叫做流形的元素. 其具体的确定方式形成离散流形的概念是如此司空见惯, 以致对任何给定的事物总可以找到, 至少在开化了的语言中可以找到, 一个能够把它包括于其中的概念 (而且因此数学家在离散量的学说中, 就可以毫不犹豫地以所给事物都是同一类的这个要求作为研究的出发点), 相反, 导致构造其确定方式形成一连续流形的量的概念起因, 在日常生活中是如此稀少, 以致可感知客体的位置和颜色很可能就是那几个少数的概念, 它们的确定方式形成一多重延伸流形. 导致这些概念的生成和成长的更经常的起因, 首先要到高等数学中去找.

通过一种标记或边界从流形中区分出的一个一个确定的部分称之为量子 (Quanta)[2]. 在数量 (Quantität) 上来对它们进行比较, 在离散量的情况下是通过计数来实现, 在连续量的情况下则是通过测量来完成. 测量就在于将要比较的量中的一个放到另一个的上面; 因此为了测量就得有一个办法把一个量取作另一个的测

[1] 一般的量的概念与其 (具体) 确定方式之间的关系就正如点的概念与一个一个具体的点之间的关系一样, 相当于一个概念的内涵与外延之间的关系, 这从下文立即可以看出作者所谓的 “Bestimmungsweise” 是什么意思, 为了与原文更贴近, 故直译为 “确定方式”, 虽然从中文的表达习惯来看, 单独从这个词还不易看出作者的这个意思, 所以在阅读下文时要请读者特别记住. 这里英译为 “specialization” (特别指定), 而俄文译本更意译为 “состояний” (状态), 意思是说, 一个个具体的点是 “点” 这个 “概念” 的不同 “状态”, 可能都有助于读者理解. —— 中译者注

[2] 这里 “量子” 的概念这句话已经讲得很清楚了, 它与物理学中的量子的概念是两回事. —— 中译者注

量标尺. 如果不能做到这一点, 则人们只能在一个是另一个一部分时做到比较这两个量, 而且这时只能判断是大或是小, 而不能判断是多少. 在这种情况下对它们所能从事的研究, 形成量理论学的一个一般来说与度量【规定】[1] (Massbestimmung) 无关的部分, 其中量不是作为与位置无关而存在的, 也不是作为可用一个单位来表达的, 而是被看成是一流形中的一个区域. 这种研究对数学的许多部分, 特别是对多值解析函数的处理, 是必不可少的, 而这一研究的短缺很可能就是那著名的 Abel 定理和 Lagrange, Pfaff, Jacobi 在微分方程的一般理论中所取得的成就长期未能开花结果的主要原因. 对当下的目标来说, 从这个延伸量学说的一般部分, 在这部分中除了在概念本身中所包含的内容之外, 再未作任何更多的预设, 我们只要突出两点就足够了, 其中第一点就是生成一个多重延伸流形, 第二点涉及将给定流形中位置确定归结为数量确定 (Quantitätsbestimmungen) 并由此来阐明 $n$ 重延伸的本质特征.

**2.**

设有一概念, 它的确定方式形成一连续流形, 人们以一种确定的手术 (bestimmte Art) 从其中一个确定方式过渡到另一个, 则经此手术得出的一系列确定方式形成一个单重延伸的流形, 其本质的特征是, 在其中从一个点出发的连续进程只能向两个方向, 或是向前, 或是向后, 发展. 设想这个流形又变成另一个完全不同的流形, 确切地说也是以一种确定的手术, 也是这样地使它的每一个点都变成流形中的另一个确定的点, 从而这样得到的全部确定方式形成一个二重延伸的流形. 类似地, 如果将一二重延伸流形以确定的手术变到另一个完全不同的流形, 我们就会得到一个三重延伸的流形, 而且易见, 人们可以如何将这种构作继续做下去. 如果我们把概念看作可确定的 (bestimmbar), 换成其对象看成是可变的[2], 那么这种构作就可认为是, 将一维的可变动性 (Veränderlichkeit)[3] 与一 $n$ 维的可变动性组合成一 $(n+1)$ 维的可变动性.

**3.**

现在我要来证明, 人们如何能反过来将一个其区域给定了的可变动性分解成一个一维的可变动性与一个较低维的可变动性. 为此设想在一个一维流形中的一可变段 —— 从一固定点算起, 以便其值可以互相比较 ——, 它对所给流形的每一点具有一个随该点连续改变的值, 或者换言之, 人们在所给流形中取一个位置的连续函数, 而且还是这样的函数, 它在沿此流形一部分上不会是常量. 于是每一组这样

[1] 方括号【 】内为译者所加, 以后同此. —— 中译者注

[2] 作者在这里的意思也许可以这样来理解, 这里强调的不是概念与其确定方式之间的关系, 而是指将形成流形的确定手术看成可变的对象. —— 中译者注

[3] 这里 Veränderlichkeit 也许可以译为 "变动范围", 在其英译中用的是 "variability", 而在其俄译中用的是 "изменяемости", 都不是译成 "变动范围". —— 中译者注

的点, 这个函数在其上取常数值的, 就形成一个维数低于所给流形维数的连续流形. 当改变这个函数值时这些流形就会相互转换; 于是人们就可以认定, 从其中一个流形可以得出其余的来, 而且一般来说可以是这样得出的, 它的每一个点变到另一个流形中的一个确定的点; 例外的情形对它们的研究也很重要, 在此可以暂且不论. 这样一来在给定流形中的位置确定就归结到一个量的确定 (Grössenbestimmung) 和在一个延伸重数较低的流形中位置的确定. 现在容易证明, 如果所给流形是 $n$ 重延伸的, 那么这个流形就有 $(n-1)$ 维. 通过 $n$ 次重复这个手术, 在一 $n$ 重延伸流形中的位置确定因此就归结为 $n$ 个量的确定, 而在一给定流形中的位置确定, 如果这是可能的, 也因此归结为一组有限个量的确定. 可是还有这样的流形, 其中的位置不是能用一组有限个的量来确定, 而是要求用一无限序列的量来确定, 或者是要求用到一连续集合的量来确定. 这种流形的例子有, 例如, 一给定区域上的所有可能的函数所确定的流形, 立体图形所有可能的形状构成的流形, 等等.

## II. 在假设线具有与位置无关的长度, 因而每一条线都可通过另一条线来测量的前提下, 一 $n$ 维流形能拥有的测量关系

在建立了 $n$ 重延伸的流形的概念, 并且找到了它的基本特征就是, 在其中位置的确定要归结到 $n$ 个量的确定之后, 现在接下来讨论作为上面提出的第二个问题、即对这种流形能拥有的测量关系的研究, 以及讨论能够足以确定这种测量关系的条件. 这种测量关系只能在抽象的量的概念中来研究, 其内在联系只能用公式来表述; 然而在一定的预设下它们可以分解成那样一些关系, 取其单个时可以作几何的描述, 从而就有可能将计算的结果几何地来表达. 这样一来, 为了得到牢固的基础, 我们的确就不可避免地要用公式来做抽象的研究, 但是这样用公式得出来的结果能用几何的外衣包装起来. 这二者的基础都包含在枢密顾问 Gauß 先生那篇著名的论曲面的著作中.

### 1.

度量规定 (Massbestimmungen) 要求量与位置无关, 这可以多种方式出现; 首先提出的假定, 这也是我在此要追随采用的, 很可能就是, 设线的长度与其位置无关, 从而每一条线都可以用另一条线来测量. 如果将位置确定归结到量的确定, 因而在一给定的 $n$ 重延伸流形中点的位置就可用 $n$ 个变量 $x_1, x_2, x_3$, 由此下去直至 $x_n$ 来表示, 于是由此可以得出一条线就可以用给出这些量 $x$ 作为单个变量的函数来确定. 于是我们的任务就是要为线的长度建立一个数学表达式, 为达此目的就必须把诸量 $x$ 看成是能用单位来表达的. 我只想在一定的限制下来处理这个问题, 而且首先我想限于这样一种线, 其上诸量 $dx$ —— 诸量 $x$ 的相关改变 —— 之间的比例连续地改变; 于是人们可以设想将线分解成小单元, 在这些小单元之内诸量 $dx$

的比例可以看成是常数, 从而我们的问题就归结为, 对每一点建立一个从该点发出的线元 $ds$ 的一般表达式, 因而式中将会包含诸量 $x$ 和量 $dx$. 现在我来假定第二点, 即在忽略第二阶量时, 这个线元的长度在它上面的所有点的位置作相同的无限小的改变下, 不会改变, 而这同时也就意味着, 当全部量 $dx$ 按相同的比例增大时, 线元本身也会以相同的比例改变. 在这个假定下线元将可以是量 $dx$ 的任何一个一阶齐次函数, 它在所有量 $dx$ 改变其符号时不会改变, 而这就表明那些常数都是量 $x$ 的连续函数. 为了找到最简单的这种情形, 我首先来对那些处处都是与这个线元起点等距的 $(n-1)$ 重延伸的流形来求一表达式, 即, 我要找寻一个位置的连续函数, 它的值能将它们相互加以区别. 那么这个函数从这个线元的起点出发向各个方向的值的变化必定要么总是减小, 要么总是增大; 我将假定它向各个方向增大, 因而在该点取极小. 这样一来, 如果它的一阶和二阶微商均为有限, 它的一阶微分就必定会等于零, 而且二阶微分也绝不可能为负; 我假定它始终保持为正. 这样一来这个二阶微分表达式在 $ds$ 保持为常数时, 也保持为常数, 而当各个量 $dx$ 以及从而 $ds$ 也全都以同一个比例改变时, 它就会以平方的比例增大; 因而它就 $=\text{const}\ ds^2$, 从而有 $ds=$ 诸量 $dx$ 的一个恒正的二次整齐次函数的平方根, 其中的系数是诸量 $x$ 连续函数. 对于空间, 如果用直角坐标来表示点的位置, 则有 $ds=\sqrt{\sum(dx)^2}$: 因而空间就包含在这种最简单的情况之下[1]. 接下来的简单例子很可能就是包括这样一些流形, 它们的线元可由一四次微分表达式的四次方根来表达. 这种更一般类型的流形的研究并不需要什么本质上不同的原理, 但是却十分费时, 而对空间的学说相对地来说也不会增添多少新的说明, 尤其是其结果无法作几何解释; 因此我只限于那种流形, 它们的线元是可以用一个二次微分式的二次方根来表示的. 人们可以将这样的表达式变换成另一个相似的表达式, 办法就是用 $n$ 个新的独立变量的函数来代替原来的 $n$ 个独立变量. 但是用这种方法并不能将任一表达式变换到任一其他的表达式; 因为表达式含有 $n\cdot\dfrac{n+1}{2}$ 个系数, 它们都是不变量的任意函数; 但是通过引进新的变量只能满足 $n$ 个关系, 因而做到使 $n$ 个系数等于给定的量. 这样一来剩下的 $n\cdot\dfrac{n-1}{2}$ 个系数要由我们所描述的流形的性质来完全确定, 因此确定其测量关系就需要 $n\cdot\dfrac{n-1}{2}$ 个位置的函数. 因此那种流形, 线元在其中能和在平面和空间中一样表为 $\sqrt{\sum dx^2}$ 的, 只不过是我们在这里要研究的流形的一种特殊情况; 它理应有一个自己的专门名字, 因此我想把这种线元的平方在其中能表为独立微分平方之和的流形称为平直的流形. 为了能够看出可以表述为预定形式的全部流形的真正的差异性, 就必须排除由表述方式的不同所导致的差异, 而这可通过按照一个确定的原则选择变量来达到.

[1] Riemann 在此所说的 “Ranm (空间)”, 是专指通常的欧氏空间而言. —— 中译者注

**2.**

为了这个目的人们设想从任一点构造一个由该点发出的最短线【短程线】的系统; 于是一个任意点的位置就可以通过它所处的那条最短线的方向以及通过它在该线上离开起点的距离来确定, 从而能由诸量 $dx$ 在此最短线的起点处的诸值 $dx^0$ 的比例及其长度 $s$ 表出. 现在我们来引进由 $dx^0$ 形成这样一种线性表达式 $d\alpha$ 来代替 $dx^0$, 使得线元的平方在起点处的值等于这些表达式 $d\alpha$ 的平方和, 这样一来独立变量就是诸量 $d\alpha$ 的比值和量 $s$; 最后再用与 $d\alpha$ 诸量成比例的这样一些量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 来代替 $d\alpha$, 使得其平方和 $= s^2$. 如果引进了这些量, 那么线元的平方对于 $x$ 的这些无穷小值就 $= \sum dx^2$, 但是它的下一阶次的项等于 $n \cdot \dfrac{n-1}{2}$ 个量 $(x_1dx_2 - x_2dx_1), (x_1dx_3 - x_3dx_1), \cdots$ 的一个二次齐次式, 因而是一个四阶的无穷小量, 所以当我们把它除以一个其顶点的变量值分别为 $(0,0,0,\cdots), (x_1, x_2, x_3, \cdots)$, $(dx_1, dx_2, dx_3, \cdots)$ 的无穷小三角形【的面积】的平方时, 我们就会得到一个有限的量. 只要 $x$ 和 $dx$ 还包含在同一二元线性形式中, 或者说只要从值为 0 到值为 $x$ 的最短线和从值为 0 到值为 $dx$ 的最短线这二者位于同一面元上, 这个量就会保持为相同的值, 因而也就只与位置与方向有关. 所以显然在所描述的流形为平直的时候, 即在线元的平方能化为 $\sum dx^2$ 的时候会 $= 0$, 因而可以看成是在这一点沿曲面方向所呈现的偏离平直程度的一个度量. 将它乘以 $-\dfrac{3}{4}$ 就会等于枢密顾问 Gauß 先生称之为曲面的曲率的那个量. 为了确定在可以以预定形式来描述的 $n$ 重延伸的流形中的测量关系, 我们发现需要前面提到的 $n \cdot \dfrac{n-1}{2}$ 个位置函数; 因此如果在每一点上曲率沿 $n \cdot \dfrac{n-1}{2}$ 个曲面方向都已给定, 只要这些值之间不存在恒等关系, 一般说来实际上这种情况不大会有, 则由此就可以将测量关系确定下来. 这种其线元由一二阶微分式的二次方根来表示的流形, 其测量关系可以用与变量选择无关的方式来表达. 对那种其线元要用不那么简单的表达式来表示的流形, 例如要用一四次微分表达式的四次方根的那种, 也可以用完全相同的方法来达到这个目的. 在这种情况下的线元一般来说就不再能化成由微分表达式的二次和的二次方根的形式, 而且其线元的平方的表达式在度量对平直程度偏离时因此也就不会是一个二阶无穷小, 对这种流形这一偏离将会是四阶的无穷小量. 这种流形的这一性质因而看来可以称之为在极小部分的平直性. 但是对当下的目的来说这种流形最重要的性质, 我们在这里就是为了来研究它们, 就是能用曲面来几何地描述二重延伸流形的这种关系, 而多重延伸流形的这种关系可以归结为在其中所包含的曲面上的这种关系, 不过对此我们还要作一些简短的讨论.

**3.**

在曲面的概念中除了内在的度量关系, 在其中只考虑了在曲面上的路径的长度, 我们还要经常考虑到它对处于它之外点的相对位置的关系. 但是我们可以将这

种外部关系剥离出去, 办法就是让它接受这样的变形, 在这种变形下它里面的曲线的长度不会改变, 即设想它承受任意的弯曲 —— 不加伸长 ——, 并把可以如此相互生成的曲面看成是同一个曲面. 因此, 例如, 任意的柱面或锥面都是等同于一个平面, 因为通过纯粹的弯曲就可把它们变成平面, 这个过程中内部的度量关系保持不变, 平面上的全部定理 —— 因而也就是整个平面测量学 —— 保持有效; 相反它被看成是与球有本质的不同, 后者不经过拉伸就不能变成平面. 根据前面的研究, 如一二重延伸体 (Grösse)[1] 的线元能由一二次微分形式的平方根来表示, 如平面这种情况, 则其中每一点上的内在的测量关系由总曲率来表征. 这个量在曲面的情况下有直观的意义, 就是说, 它等于曲面在该点处的两个曲率的乘积, 或者也可以这样说, 在它乘以在该处由短程线构成的一个无穷小的三角形的面积之后, 就等于这个三角形的三个内角和超出两个直角和的部分的一半与半径之比【球面角盈】. 第一个定义假设了有两曲率半径之积在曲面的纯弯曲下不变的定理存在, 而第二种说法则假设了在同一地点一无穷小三角形的内角和超出两直角的余量与其面积成正比. 为了对一 $n$ 重延伸的流形在一给定点并沿该点一给定曲面方向的全曲率给出一个可以理解的意义, 我们必须从这样的事实出发, 即从一点发出的短程线, 在它的起始方向给定后就完全确定了. 根据这一点可知, 如果从该给定点出发并按在该给定面元上的所有起始方向沿短程线向前延伸, 我们将得到一个确定的曲面, 这个曲面就会在该给定点有一个确定的曲率, 它同时也就是这个 $n$ 重延伸流形在该给定点及沿该给定方向的曲率.

## 4.

在应用于空间之前还有必要对平直流形, 即那种其线元平方可以用全微分的平方和来表示的流形, 作几点一般性的考察.

在一个平直的 $n$ 重延伸的流形中, 在任一点沿任一方向的曲率均为零; 可是根据前面的研究得知, 为了确定度量关系只要知道在任一点沿 $n \cdot \frac{n-1}{2}$ 个曲面方向, 它的曲率彼此无关地等于零就足够了. 曲率处处 $= 0$ 的流形可以看成是那种曲率处处为常数的流形的特殊情况. 这种曲率为常数的流形的共同特征也可以这样来表述, 即图形在其中运动不会伸长. 因为如果在任一点沿各个方向的曲率不是同一个值, 显然图形在其中就不能随意移动和转动. 但是另一方面, 流形的测量关系由曲率完全确定; 因此围绕一点沿各个方向的度量关系就和围绕另一点的完全一样, 这样就可以用它作出相同的结构来, 从而在这种常曲率的流形中就可以给图形以任意的位置. 这种流形的度量关系只与曲率的值有关, 关于其解析表示可以指出, 在

[1] 这个词俄译本写的是 величины (量), 但是从后面的行文可以看出这个词在这里的意思是指在流形中的一个客体, 相当于 Gebilde, Clifford 的英译将它写成 extent, 看来这比较贴近原意. —— 中译者注

用 $\alpha$ 来表示这个值时, 线元的表达式可以用以下形式给出:

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\sum x^2}\sqrt{\sum dx^2}.$$

**5.**

对常曲率曲面的考察可以用来做几何的阐述材料. 不难看出, 曲率为正的曲面可以包到一个球上去, 这个球的半径等于 1 除以曲率的平方根; 为了综观这种曲面的全体, 我们设其中一个具有球的形状, 其余的则具有与赤道相切的旋转曲面的形状. 于是曲率大于这个球的曲面就会从内部与球相切, 其形状则取一环面离轴部分的外表面的形状; 它可以卷到一半径较小一些的球的球带上, 但是要卷不止一次. 正曲率较小的曲面可以这样来得到: 从一个半径较大的球面上切出去一块由两个大半圆所围的月牙体, 再把切割线缝合起来. 曲率等于零的曲面就将是一立于赤道上的柱面; 但是曲率为负的曲面将从外部与此柱面相切, 其形状就好像一环面朝向轴的这一表面的形状, 把这种曲面设想为曲面块在其中运动的场所, 就好像空间是物体运动的场所一样, 那么曲面块在所有这些曲面上运动起来都不会伸长. 正曲率曲面总是可以这样来生成, 即曲面块在其中随意运动还不会弯曲, 即成为球形曲面, 而负曲率的曲面则不然. 除了这种曲面块与位置的无关性外, 在零曲率的曲面的情况中我们还发现有方向与位置的无关性, 而这是其他曲面所没有的.

## III. 在空间上的应用

**1.**

在对 $n$ 重延伸流形的度量关系如何确定作了这些研究之后, 在预设线长与位置无关以及线元可用一二次微分表达式的平方根来表达的前提下, 因而也就是假设极小部分为平直的前提下, 现在可以来给出为确定空间度量关系所需的必要而又充分的条件了.

首先可以这样来表述, 即在任一点处三个曲面方向的曲率 $=0$, 从而也就是说, 在三角形的三内角之和处处等于两个直角时, 空间的度量关系也就确定下来了.

但是, 第二, 如果我们像 Euklid 那样, 不仅假设有线、而且还假设物体的存在也与位置无关, 那么就可以得出, 曲率处处为常数, 并且如果有一个三角形的内角和确定了, 所有三角形的内角和也就都确定了.

最后, 第三, 我们还可以, 代替假设线长度与位置和方向无关, 假设它的长度和方向均与位置无关. 根据这个观点, 方向的变化和位置的差异都是可以用三个独立的单位来表示的复量.

## 2.

在至此的研究过程中我们首先是把延伸关系 (Ausdehnungsverhältnisse) 或区块关系 (Gebietsverhältnisse) 与度量关系分别开来讲, 并且发现在同一延伸关系下允许设想有不同的度量关系; 接下来就是设法寻求一种简单的度量规定系统, 可以用它来完全确定空间的度量关系, 而且所有关于它们的定理都是这个系统的必然结果; 现在剩下来的就是讨论这个问题: 这些假设如何以及在何种程度上和在多大的范围内得到了经验保证. 在这方面存在着纯粹的延伸关系与度量关系之间的实质性的区别, 就前者而言, 这里各种可能的情形形成一离散流形, 经验告诉我们的东西的确还不十分确定, 但还不是不准确, 而在后者, 在那里可能的情形形成一连续流形, 由经验所作的每一个断言总是保持不够准确 —— 尽管它接近正确的可能性是如此之大. 这一情况在将这些经验确定下来的结论推广到大到不可测和小到不可测的观察限度之外时将会是重要的; 因为后者显然在观察限度之外会越来越不精确, 而前者则否.

在将空间的构作推广到大到不可测的境地时, 要区分*无界* (*Unbegrenztheit, unboundedness*) 和*无尽* (*Unendlichkeit, infinite extent*) 这两种情况; 前者属于延伸关系, 后者属于度量关系. 说空间是一个无界的三重延伸的流形这一点是一个假设, 它在对外部世界的每一个观点上得到了应用, 时时刻刻用它来补充完善实际感觉的领域, 构造出所寻求对象的可能位置, 在这种应用中不断地得到确认. 这样一来空间的无界性就得到了比任何一种外部经验 (Erfahrung) 更大的经验上的确定性 (empirische Gewissheit). 但是由此就推不出【空间】会有无限【延伸】性;【相反】如果我们假设物体有对位置的无关性, 因而要赋予【空间】一个常曲率, 那么空间就反而必定是有限的, 只要这个曲率还有一个不管多么小的正值. 如果人们从一面元上的所有初始方向沿一短程线延伸出去, 就会得到一个具有正常数曲率的无界曲面, 也就是得到一个这样的曲面, 它在一平直的三重延伸的流形中将取球面的形状, 从而是有限的.

## 3.

关于大到不可测的问题对于解释自然来说是多余的问题. 但是关于小到不可测的问题则是另一回事. 我们对无限小领域内现象的因果关系的认识在极大程度上有赖于我们对它们研究的精确程度. 近百年来对机械自然的认识【力学】的进步几乎全部都有赖于构造的精确性, 而这是依靠无穷小分析的发现以及由 Archimed, Galiläi 和 Newton 等人所发现的、它们正服务于今天的物理学的简单基本原理, 才有可能. 但是在自然科学中至今还缺乏作这种构造的简单基本原理, 为了认识这种因果关系, 人们只能深入到显微镜所能达到的空间大小的程度. 因此关于在小到不可测的范围内的空间测量关系就不是属于多余的.

如果假设存在与位置无关的物体,则曲率会处处为常数,于是由天文测量得出,它不可能异于零;或者说无论如何它的倒数是这样大的一个面积的值,我们的望远镜所能达到的范围与它相比肯定可以忽略不计.可是如果这种物体与位置的无关性不成立,则由大范围内的度量关系就得不出无限小的范围内的度量关系来;于是只要在每一可测的空间部分中总曲率不是明显异于零,则在每一点在三个方向的曲率就可以取任意值;如果线元可用一二次微分式的平方根来表示的假设不成立,更为复杂的关系就可能出现.但是现在看来确立空间度量基础的经验的概念,即刚体和光线的概念,在无穷小的范围内已经失效;因此很可以设想,在无穷小的范围内空间的度量关系与几何学的假设并不相符,实际上人们应该这样设想,只要通过这样的设想能用更简单的方式来解释现象就可以了.

关于几何学的假设在无限小的范围内是否有效的问题与寻求空间度量关系的内在基础密切相关.就后面这个问题而言,它仍然可以说是关于空间学说的问题,在上面关于应用的评述中就提到过,在离散流形的情况下,度量关系的原则就已经包括在这个流形的概念之中了,而在连续流形的情况下这个原则就必须从外面另外加上去.因而这就必定是,要么作为空间基础的实在 (Wirkliche) 必定形成一个离散流形,要么这一度量关系的基础就要到外部去寻找,到作用于其上 (指这个实在 ——中译者注) 的结合力上去找.

这个问题的解决只能这样来寻求,这就是从今天所有的经过经验考验、并且是由 Newton 为之奠定了基础的、对现象的理解出发,然后再在它不能解释的事实的推动下逐渐加以改造;这种像我们在这里所做的从一般的概念出发的研究只能做到,不让这一研究工作受到概念局限性的阻碍,使我们对事物之间联系的认识上的进步不会因传统的偏见而受到束缚.

这就把问题引导到了另一个科学领域,物理学的领域,正是由于今天这个会的性质不允许我来谈它.

# 概 览

## 研究计划

### I. $n$ 重延伸量的概念[1]

§1. 连续流形和离散流形.流形的确定部分叫做量子.将连续量的理论分成两部分:

1) 关于纯粹区域关系的连续量理论,在其中未假设量与位置无关,

[1] 第 I 节同时也是位置分析 (analysis situs) 论一文的前期工作.

2) 关于度量关系的连续量理论, 其中必须假设量与位置无关

§2. 单重, 两重, ……, $n$ 重延伸流形概念的创建

§3. 将一流形中的位置确定归结到数量确定. 一 $n$ 重延伸流形的本质特征

## II. 在假设线具有与位置无关的长度, 因而每一条线都可通过另一条线来测量的前提下, 一 $n$ 维流形能拥有的测量关系[1]

§1. 线元的表达式. 线元在其中可以用一全微分平方和的平方根来表示的流形可以看成是平直的流形

§2. 其线元可以用一二次微分式的平方根来表示的 $n$ 重延伸流形的研究. 在一点沿一给定曲面方向偏离平面度的度量 (曲率). 为 (在一定的限制下) 规定度量关系的许可和充分条件是, 曲率可以在任一点的 $n \cdot \dfrac{n-1}{2}$ 个方向任意规定

§3. 几何解释

§4. 平面流形 (其中曲率处处 $= 0$) 可以看成是曲率为常数的流形的特例. 这种流形也可以这样来定义, 即在其中 $n$ 重延伸量【物体】与位置无关 (即在其中运动起来不会伸长) 能够成立

§5. 常曲率曲面

## III. 在空间上的应用

§1. 足以规定空间度量关系的一组事实, 例如几何学所假设的

§2. 在将观察引向大到不可测的方向的极限过程中, 这些经验规定的有效性能走多远?

§3. 在向无限小的极限过渡中由能走多远? 这个问题与解释自然之间的关系[2]

[1] 对一 $n$ 重延伸的流形可能有的度量规定这里所做的研究是很不完整的, 可是对当前的目的来说已经足够了.

[2] 第 III 部分的 §3 还需要进一步补充和改写. (以上注释为 Riemann 本人所作.)

# 附录 IV

# 对试图回答最著名的巴黎科学院所提出问题的数学评述

Bernhard Riemann

“试求一均匀固体应具备何种热状态方能使得某时刻在其上所给定的一组等温曲线在经过一段时间之后仍保持为这样一种等温线, 即其上一点的温度可表为时间及其他两个独立变量的函数.”*

Et his principiis via sternitur ad majora.

从这些原理出发, 方法就扩展到更大的范围.

**1.**

对最著名的科学院所提出的这个问题我们将这样来进行研究, 首先求解更一般的问题:

确定物体内热的运动的性质以及热分布该如何才能使等温曲线组恒保持为等温曲线, 然后再来研究

从这个问题的一般解挑出那种情况, 其中这些性质处处都保持一样, 即物体是均匀的.

## 第 一 部 分

**2.**

现在我们来研究第一个问题, 考察某一物体内热的运动. 如果 $u$ 表点 $(x_1, x_2, x_3)$

---

* 这份回应巴黎科学院于 1858 年提出, 又于 1868 年撤销的有奖征答问题的论文, 是由 Riemann 于 1861 年 1 月送抵科学院的, 它没有得到获奖的认可, 因为它获得结果的途径没有全部给出. Riemann 由于健康状况不佳, 本来打算详细修改这篇论文的工作未能得以完成. —— 编者注

在时刻 $t$ 时的温度, 则众所周知函数变化所满足的一般方程取如下的形式,

$$\frac{\partial\left(a_{1,1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_{1,2}\frac{\partial u}{\partial x_2}+a_{1,3}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)}{\partial x_1}+\frac{\partial\left(a_{2,1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_{2,2}\frac{\partial u}{\partial x_2}+a_{2,3}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)}{\partial x_2}$$
$$+\frac{\partial\left(a_{3,1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_{3,2}\frac{\partial u}{\partial x_2}+a_{3,3}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)}{\partial x_3}=h\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{I}$$

那些在方程中的量 $a$ 为总的导热性, $h$ 为单位体积的热容量, 即比热与密度的乘积, 它们都可以认为同是那些变量 $x_1, x_2, x_3$ 的任意函数. 我们将研究限于那种两个相反方向的热导系数是一样的情况, 就是说在 $a$ 的各个系数之间存在关系

$$a_{i,i'}=a_{i',i}.$$

此外, 由于热量必定是由较热的地方流向较冷的地方, 所以二次型

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}, & a_{2,2}, & a_{3,3} \\ a_{2,3}, & a_{3,1}, & a_{1,2} \end{pmatrix}$$

必定为正定的.

### 3.

在方程 (I) 中我们引入三个新的独立变量 $s_1, s_2, s_3$ 来代替直角坐标 $x_1, x_2, x_3$.

方程 (I) 这个变换很容易实现, 因为, 如果用 $\delta u$ 表示量 $u$ 的一个任意的无限小的变分, 那么该方程就是下述展布在整个物体上的积分

$$\delta\iiint\sum_{i,i'}a_{i,i'}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_{i'}}dx_1dx_2dx_3+\iiint 2h\frac{\partial u}{\partial t}\delta u dx_1dx_2dx_3 \tag{A}$$

只与变分 $\delta u$ 在物体表面上的值有关的充分而又必要的条件. 在引进新变量后这个表达式 (A) 就转变为

$$\delta\iiint\sum_{i,i'}b_{i,i'}\frac{\partial u}{\partial s_i}\frac{\partial u}{\partial s_{i'}}ds_1ds_2ds_3+\iiint 2k\frac{\partial u}{\partial t}\delta u ds_1ds_2ds_3, \tag{B}$$

其中为了简短起见设定了

$$\frac{\sum_{i,i'}a_{i,i'}\frac{\partial s_\mu}{\partial x_i}\frac{\partial s_\nu}{\partial x_{i'}}}{\sum\pm\frac{\partial s_1}{\partial x_1}\frac{\partial s_2}{\partial x_2}\frac{\partial s_3}{\partial x_3}}=b_{\mu,\nu},\quad \frac{h}{\sum\pm\frac{\partial s_1}{\partial x_1}\frac{\partial s_2}{\partial x_2}\frac{\partial s_3}{\partial x_3}}=k.$$

设二次型

$$(1)\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,2} & a_{3,3} \\ a_{2,3} & a_{3,1} & a_{1,2} \end{pmatrix}\quad (2)\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{2,2} & b_{3,3} \\ b_{2,3} & b_{3,1} & b_{1,2} \end{pmatrix}$$

的行列式为 $A$ 和 $B$, 而它们的共轭形式相应地记为

$$(3)\ \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{3,3} \\ \alpha_{2,3} & \alpha_{3,1} & \alpha_{1,2} \end{pmatrix} \quad (4)\ \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{2,2} & \beta_{3,3} \\ \beta_{2,3} & \beta_{3,1} & \beta_{1,2} \end{pmatrix},$$

于是有

$$A = B\sum \pm \frac{\partial s_1}{\partial x_1}\frac{\partial s_2}{\partial x_2}\frac{\partial s_3}{\partial x_3},$$

以及

$$\beta_{\mu,\nu} = \sum \alpha_{i,i'}\frac{\partial x_i}{\partial s_\mu}\frac{\partial x_{i'}}{\partial s_\nu}$$

因而有

$$\sum_{i,i'} \alpha_{i,i'}dx_i dx_{i'} = \sum_{i,i'} \beta_{i,i'}ds_i ds_{i'}$$

以及

$$\frac{h}{A} = \frac{k}{B}.$$

由此易见方程 (I) 的变换归结为表达式 $\sum\limits_{i,i'} \alpha_{i,i'}dx_i dx_{i'}$ 的变换.

这样一来我们就可以规划解决我们的一般问题如下. 首先说明作为变量 $s_1, s_2, s_3$ 的函数 $b_{i,i'}$ 与 $k$ 应如何才能使得量 $u$ 能够与这些变量中的一个无关. 解决了这个问题之后, 我们就可以构造表达式 $\sum\limits_{i,i'} \beta_{i,i'}ds_i ds_{i'}$. 然后, 为了知道在量 $a_{i,i'}$ 与量 $h$ 的给定值之下, 量 $u$ 是否以及在何种情况下能够表为时间和仅仅是两个变量的函数, 这就必须确立表达式 $\sum\limits_{i,i'} \beta_{i,i'}ds_i ds_{i'}$ 是否能够变换成给定的形式; 而这个问题, 正如我们在下面将看到的, 可以用与 Gauß 在他的曲面理论中所采用的方法几乎完全相同的方法来解决.

## 4.

这样, 我们首先就要问, 变量 $s_1, s_2, s_3$ 的函数 $b_{i,i'}$ 与 $k$ 应如何才能使得 $u$ 与其中的一个变量无关. 为了简化记号, 我们用 $\alpha, \beta, \gamma$ 来记 $s_1, s_2, s_3$, 而形式 (2) 则记为

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix},$$

如果 $u$ 与 $\gamma$ 无关, 那么微分方程就要写成以下的形式:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + 2c'\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} + b\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} + e\frac{\partial u}{\partial\alpha} + f\frac{\partial u}{\partial\beta} - k\frac{\partial u}{\partial t} = F = 0, \tag{II}$$

其中设定了

$$\frac{\partial a}{\partial \alpha}+\frac{\partial c'}{\partial \beta}+\frac{\partial b'}{\partial \gamma}=e,\quad \frac{\partial b}{\partial \beta}+\frac{\partial c'}{\partial \alpha}+\frac{\partial a'}{\partial \gamma}=f.$$

给 $\gamma$ 以不同的值我们就可以从方程 (II) 得到联系量 $u$ 的六个微商的不同的方程, 它们的系数不依赖于 $\gamma$. 设在这些方程中相互独立的方程为:

$$F_1=0, F_2=0,\cdots,F_m=0,$$

而每一个其他的方程都可由这些方程推出. 由此显然可知, 只要方程 $F=0$ 是由这 $m$ 个方程推出的, 则不论其 $\gamma$ 的值如何, 必有以下形式

$$c_1F_1+c_2F_2+\cdots+c_mF_m,$$

而且在此表达式中只有 $c$ 与 $\gamma$ 有关.

现在我们来考察几个 $m$ 为 $1,2,3,4$ 时的个别的情形, 并且力求将那些与 $\gamma$ 无关的方程写成尽可能更简单的形式, 将方程 $F=0$ 分解成这些方程.

第一种情形, $m=1$.

如果 $m=1$, 那么在方程 (II) 中系数之比就会与 $\gamma$ 无关. 引进新的变量 $\int kd\gamma$ 来代替 $\gamma$, 总可以再加上要求 $k=1$, 这时所有的系数结果就会与 $\gamma$ 无关. 然后引进某种新的变量来代替 $\alpha,\beta$, 以使 $a$ 和 $b$ 为零. 为此只要将表达式 $bd\alpha^2+2c'd\alpha d\beta+ad\beta^2$ (因为二次型 (2) 是正定的, 它不可能是线性微分形式的平方) 变到 $md\alpha'd\beta'$ 的形式并取 $\alpha',\beta'$ 作独立变量.

这样之后微分方程 (II) 在目前的情况下取下述形式

$$2c'\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+e\frac{\partial u}{\partial\alpha}+f\frac{\partial u}{\partial\beta}=\frac{\partial u}{\partial t},$$

这时在二次型 (2) 中会有 $a=b=0, a'$ 与 $b'$ 就将是 $\gamma$ 的线性函数, 并且 $c'$ 与 $\gamma$ 无关. 在这种情况下, 如果开始的温度就只是变量 $\alpha$ 与 $\beta$ 的任意函数, 那么就很清楚温度将恒与 $\gamma$ 无关.

第二种情况, $m=2$.

如果方程 (II) 分解为两个与 $\gamma$ 无关的方程, 那么从其中一个方程就可以消去另一个方程中的 $\frac{\partial u}{\partial t}$. 再把所得的方程简短地表为

$$\Delta u=0, \tag{1}$$

而另一个则表为

$$\Lambda u=\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{2}$$

这里我们用 $\Delta$ 和 $\Lambda$ 来表示含运算 $\partial_\alpha$ 和 $\partial_\beta$ 的特征表达式.

易见通过独立变量的变换, 第一个方程中的 $\Delta$ 可以变成

$$\begin{aligned}\text{或者 } &= \partial_\alpha\partial_\beta + e\partial_\alpha + f\partial_\beta,\\ \text{或者 } &= \partial_\alpha^2 + e\partial_\alpha + f\partial_\beta,\\ \text{或者 } &= \partial_\alpha,\end{aligned}$$

并且不排除 $e=0$, $f=0$ 的情况.

由于

$$0=\partial_t\Delta u=\Delta\partial_t u=\Delta\Lambda u,$$

所以由方程 (1) 和 (2) 两式推得了

$$\Delta\Lambda u=0. \tag{3}$$

在此可能有两种不同的情况, 或者是 (α): 方程 (3) 可以由方程 (1) 得出, 即有

$$\Delta\Lambda u=\Theta\Delta,$$

其中 $\Theta$ 是一个新的特征表达式, 或者是 (β): 方程 (3) 不能由 (1) 推出, 所以就是一个独立于 $\Delta u$ 的新方程.

想要对至少 $\Delta$ 的一种形式来研究情形 (α), 我们设

$$\Delta=\partial_\alpha\partial_\beta+e\partial_\alpha+f\partial_\beta.$$

这时 $\Delta\Lambda u$ 借助于 $\Delta u=0$ 约化为只含对一个独立变量的二阶导数, 而且必定有所有的系数等于零. 假设项 $\partial_\alpha\partial_\beta$ 借助于方程 $\Delta u=0$ 被消去, 令

$$\Lambda=a\partial_\alpha^2+b\partial_\beta^2+c\partial_\alpha+d\partial_\beta,$$

并构造表达式

$$\Delta\Lambda-\Lambda\Delta.$$

因为在这个表达式中 $\partial_\alpha^3,\partial_\beta^3$ 前的系数应为零, 于是得到 $\dfrac{\partial a}{\partial\beta}=0,\dfrac{\partial b}{\partial\alpha}=0$, 由此显然可知, 在排除 $a=0,b=0$ 这种特殊情况下, 通过采取适当的独立变量的变换可以导致 $a=b=1$ 的结果. 在这种情况下, 令 $\Delta\Lambda$ 的表达式中 $\partial_\alpha^2,\partial_\beta^2$ 前的系数等于零, 我们就会得到

$$\frac{\partial c}{\partial\beta}=2\frac{\partial e}{\partial\alpha},\quad \frac{\partial d}{\partial\alpha}=2\frac{\partial f}{\partial\beta},$$

因而这时我们就可以令

$$\begin{aligned}\Delta&=\partial_\alpha\partial_\beta+\frac{\partial m}{\partial\beta}\partial_\alpha+\frac{\partial n}{\partial\alpha}\partial_\beta,\\ \Lambda&=\partial_\alpha^2+\partial_\beta^2+2\frac{\partial m}{\partial\alpha}\partial_\alpha+2\frac{\partial n}{\partial\beta}\partial_\beta,\end{aligned}$$

其中用 $m, n$ 表变量 $\alpha, \beta$ 的某两个函数, 它们应当满足两个微分方程, 使得 $\Delta\Lambda$ 的表达式中 $\partial_\alpha, \partial_\beta$ 前的系数为零.

在其他特殊情况下也可以用完全相同的方式来成功地求得满足条件

$$\Delta\Lambda = \Theta\Delta$$

的最简单的 $\Delta$ 和 $\Lambda$. 但是我们不打算滞留在更为普通的研究上了.

容易理解, 在这种情况下, 如果初始温度是量 $\alpha, \beta$ 的、满足方程 $\Delta u = 0$ 的某个函数, 则温度就会始终保持与 $\gamma$ 无关; 实际上, 由方程

$$\Delta u = 0,$$
$$\Lambda u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

可以推得 $0 = \Theta\Delta u = \Delta\Lambda u = \Delta\partial_t u = \dfrac{\partial \Delta u}{\partial t}$, 而这就意味着, 如果在初始时刻函数 $u$ 还满足方程 $\Lambda u = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, 那么 $\Delta u = 0$ 就会延续到任意时刻都成立. 于是热的运动也就会满足该方程 $F = 0$.

**5.**

接下来要来研究第二种特殊情况 (β), 这时方程 $\Delta\Lambda u = 0$ 独立于 $\Delta u = 0$. 为了能够同时把后面 $m = 3, m = 4$ 的情况也包括进来, 我们来做一个一般的假设, 认为, 除了方程 $\Delta u = 0$ 之外, 还有某个线性微分方程 $\Theta u = 0$, 它不含 $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, 也不能由 $\Delta u = 0$ 导出.

如果 $\Delta$ 具有 $\partial_\alpha\partial_\beta + e\partial_\alpha + f\partial_\beta$ 的形式, 则借助于方程 $\Delta u = 0$ 可使表达式 $\Theta$ 不含对这两个变量的导数.

在此要区分两种不同的情况.

如果表达式 $\Theta$ 一开始就没有对某个变量, 例如, $\beta$ 的所有导数, 则得到的微分方程仅含对 $\alpha$ 的导数, 形式为

$$\sum_\nu a_\nu \frac{\partial^\nu u}{\partial \alpha^\nu} = 0, \tag{1}$$

在相反的情况下则总可以得到下述形式的微分方程

$$\sum_\nu a_\nu \frac{\partial^\nu u}{\partial t^\nu} = 0, \tag{2}$$

即只含对变量 $t$ 的导数.

的确, 在这种情形下的表达式 $\Lambda u, \Lambda^2 u, \Lambda^3 u, \cdots$, 其中 $u$ 对 $t$ 的导数相等, 借助于方程 $\Delta u = 0$ 和 $\Theta u = 0$ 总可以变换成这样的形式, 使得仅含对其中一个变量的

导数, 且其所含导数的阶次不大于表达式 $\Theta u$ 中所含导数的阶次. 由于其个数有限, 所以通过消除法我们就得到了形式如 (2) 的方程. 在这两个方程中的系数 $a_\nu$ 均依赖于 $\alpha, \beta$.

必须指出, 上述方程之中有一个必定要满足, 即使 $\Delta$ 并不具有 $\partial_\alpha\partial_\beta+e\partial_\alpha+f\partial_\beta$ 的形式. 在 $\Delta=\partial_\alpha^2+e\partial_\alpha+f\partial_\beta$ 的情形就归结为前面那种, 因为借助于方程 $\Delta u=0$ 就可以或者从 $\Theta u$ 或者从 $\Lambda u$ 消除所有对 $\beta$ 的导数, 这之后就很容易得到形式如 (1) 或 (2) 那样的方程. 如果 $f=0$, 或者如果 $\Delta=\partial_\alpha$, 也会得到上述第一种情况.

现在我们来对上述第二种情况作更仔细的研究.

众所周知, 方程

$$\sum_\nu a_\nu \frac{\partial^\nu u}{\partial t^\nu}=0$$

的一般解由形如 $f(t)e^{\lambda t}$ 的项组成, 其中 $f(t)$ 为 $t$ 的整函数, 并且 $\lambda$ 为一个与 $t$ 无关的量, 不难想到, 每一个这样的项必定会满足方程 (I). 我们来证明, $\lambda$ 不会依赖于 $x_1, x_2, x_3$.

设 $kt^n$ 为函数 $f(t)$ 的最高次项. 我们来研究两种情况.

1°. 如果 $\lambda$ 为实数, 或者甚至为 $\mu+\nu i$, 其中 $\mu, \nu$ 为一个 (依赖于 $x_1, x_2, x_3$) 的实变量 $\alpha$ 的函数, 那么, 将 $u=f(t)e^{\lambda t}$ 代入方程 (I), 就可以证明 $t^{n+2}e^{\lambda t}$ 前的系数将会是

$$=k\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}\right)^2\sum_{i,i'} a_{i,i'}\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\alpha}{\partial x_{i'}}.$$

这个表达式只有在有条件

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}=\frac{\partial\alpha}{\partial x_2}=\frac{\partial\alpha}{\partial x_3}=0$$

也即 $\alpha=0$ 成立时才会等于零, 这是因为二次型

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}, & a_{2,2}, & a_{3,3} \\ a_{2,3}, & a_{3,1}, & a_{1,2} \end{pmatrix}$$

是正定的.

2°. 如果 $\lambda$ 的形式为 $\lambda=\mu+\nu i$, 而且 $\mu, \nu$ 为独立变量 $x_1, x_2, x_3$ 的函数, 则可以选量 $\mu+\nu i$ 和 $\mu-\nu i$ 作新的独立变量 $\alpha$ 和 $\beta$, 那么表达式 $u$ 除了含有 $f(t)e^{\alpha t}$ 之外, 还含有其复共轭项 $\varphi(t)e^{\beta t}$. 如果有

$$\Delta u=a\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+c\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}+e\frac{\partial u}{\partial\alpha}+f\frac{\partial u}{\partial\beta},$$

那么, 在将 $u=f(t)e^{\alpha t}$ 代入方程 $\Delta u=0$, 并令 $t^{n+2}e^{\alpha t}$ 前的系数等于零, 我们就会得到 $a=0$, 而且完全相同地将 $u=\varphi(t)e^{\beta t}$ 代入, 就会得到 $c=0$. 于是借助于方程

$\Delta u=0$ 就可以这样来变换方程 $\Lambda u=\dfrac{\partial u}{\partial t}$, 使得它只含有对一个变量的导数. 然后再将

$$u=f(t)e^{\alpha t},\quad u=\varphi(t)e^{\beta t}$$

代入, 我们就会看到, 最高阶导数的系数将等于零, 于是方程 $\Lambda u=\dfrac{\partial u}{\partial t}$ 左边的全部导数就将消失, 可是这是不可能的, 因为根据设定, $u$ 不可能化成为常数.

这样一来, 在上述的第二种情形中, 函数 $u$ 就由形如 $f(t)e^{\lambda t}$ 的有限项组成, 其中 $\lambda$ 为常数, 而 $f(t)$ 仅与 $t$ 有关.

在上述的第一种情形中, 这时必须与下述形式的方程

$$\sum a_\nu \frac{\partial^\nu u}{\partial \alpha^\nu}=0 \tag{3}$$

打交道, 把函数 $u$ 写成

$$u=\sum_\nu q_\nu p_\nu,$$

其中 $p_1,p_2,\cdots$ 是方程 (3) 的特解, 而 $q_1,q_2,\cdots$ 为任意常数, 即变量 $\beta$ 与 $t$ 的函数. 如果我们将这个 $u$ 的值代入方程

$$\Lambda u=\frac{\partial u}{\partial t},$$

就会得到如下形式的方程

$$\sum PQ=0,$$

其中量 $Q$ 为 $q$ 的导数, 即一些仅为 $\beta$ 与 $t$ 的函数, 而量 $P$ 则为一些仅为 $\alpha$ 与 $\beta$ 的函数. 正如我们在上面看到过的, 由这个方程可以得到函数 $Q$ 之间的 $\mu$ 个线性关系, 得到函数 $P$ 之间的 $n-\mu$ 个关系, 而且其中的系数仅与 $\beta$ 有关, 而 $\mu$ 为数 $0,1,2,\cdots,n$ 中的一个. 由此我们就得到了用 $q$ 对 $\beta$ 的导数来表达 $\dfrac{\partial q}{\partial t}$ 的表达式, 它与 $\alpha$ 无关.

我们来研究在这里产生的几个不同的情况.

如果 $m=2$, 且 $\Delta$ 具有形式 $\partial_\alpha\partial_\beta+e\partial_\alpha+f\partial_\beta$, 则方程 $\Delta\Lambda u=0$, 如果它不含对 $\beta$ 的导数, 就会取以下的形式

$$\frac{\partial^3 u}{\partial \alpha^3}+r\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}+s\frac{\partial u}{\partial \alpha}=0,$$

由此得知 $u$ 可写成

$$ap+bq+c,$$

其中 $a,b,c$ 仅与 $\beta$ 和 $t$ 有关, $p$ 与 $q$ 仅与 $\alpha$ 和 $\beta$ 有关. 引进 $q$ 作为独立变量来取代 $\alpha$. 这样我们就会得到

$$u=ap+b\alpha+c,$$

其中 $p$ 仅与 $\alpha$ 和 $\beta$ 有关. 将这个表达式代入方程

$$\Delta u = 0, \quad \Lambda u = \frac{\partial u}{\partial t},$$

我们就不难得到系数的形式.

剩下的情形是, 方程中已经有一个, $F=0$ 要分解成它, 具有 (1) 的形式, 即

$$r\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + s\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0.$$

那么就有 $u = ap + b$, 其中 $a$ 与 $b$ 仅仅依赖于 $\beta$ 和 $t$, 而 $p$ 仅与 $\alpha$ 和 $\beta$ 有关. 引进变量 $p$ 来代替 $\alpha$, 我们就得到

$$u = a\alpha + p, \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0.$$

这样一来, 我们就确立了, 在 $m=2$ 的情形下, 也就是在方程 $F=0$ 可分解为

$$\Delta u = 0, \quad \Lambda u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

这样两个方程的情形下, 或者应有 $\Delta\Lambda = \Theta\Delta$, 或者就是函数 $u$ 由形如 $f(t)e^{\lambda t}$ 的有限项组成, 其中 $\lambda$ 为常数, 而 $f(t)$ 是 $t$ 的整函数, 或者甚至具有以下形式

$$\varphi(\beta,t)\chi(\alpha,\beta) + \alpha\varphi_1(\beta,t) + \varphi_2(\beta,t),$$

如果 $m=3$, 则函数 $u$ 由形如 $f(t)e^{\lambda t}$ 的有限项组成, 或者就具有形式

$$\varphi(\beta,t)\alpha + \varphi_1(\beta,t).$$

最后是 $m=4$ 的情形, 它还不能算是全面详尽的研究工作.

实际上, 设除了方程 $\Lambda u = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ 之外, 还有三个联系下述各量

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}$$

之间的方程, 由此得到下述形式的方程

$$r\frac{\partial u}{\partial \alpha} + s\frac{\partial u}{\partial \beta} = 0.$$

然后可以这样来选择独立变量使得 $u$ 只是其中一个变量的函数, 由此可见,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}$$

还有 $\Lambda u, \Lambda^2 u, \Lambda^3 u$, 可以用 $\frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}$ 来表示. 但是这样我们就会得到下述形式的方程

$$a\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+b\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+c\frac{\partial u}{\partial t}=0,$$

并且将具有形式

$$pe^{\lambda t}+qe^{\mu t}+r \quad \text{或者} \quad (p+qt)e^{\lambda t}+r,$$

而且, 正如由前面已经清楚, $\lambda$ 和 $\mu$ 都是常数.

取 $p$ 来代替独立变量 $\alpha$, 然后将表达式代入方程 $\Lambda u=\frac{\partial u}{\partial t}$, 我们就可以证明, 如果 $\lambda$ 和 $\mu$ 不相等, 要想使 $q$ 只是一个变量 $\alpha$ 的函数是不可能的. 在这种情况下 $p$ 与 $q$ 可取为独立变量. 然后由方程 $\Lambda u=\frac{\partial u}{\partial t}$ 我们就得到 $r=\text{const}$.

这样一来, 在所研究的情况下 $u$ 是变量 $t$ 和还仅有一个变量的函数, 或者就具有以下形式

$$\alpha e^{\lambda t}+\beta e^{\mu t}+\text{const}, \quad (\alpha+\beta t)e^{\lambda t}+\text{const},$$

而且也不排除 $\mu=0$ 这个值.

在求得了函数 $u$ 可能有的所有形式之后, 构造方程 $F_\nu=0$ 就很容易了, 但是为了简单起见, 我们不打算构造这些方程了. 由此在每一个个别情况下, 二次型为

$$\begin{pmatrix} b_{1,1}, & b_{2,2}, & b_{3,3} \\ b_{2,3}, & b_{3,1}, & b_{1,2} \end{pmatrix}$$

及其共轭形式

$$\begin{pmatrix} \beta_{1,1}, & \beta_{2,2}, & \beta_{3,3} \\ \beta_{2,3}, & \beta_{3,1}, & \beta_{1,2} \end{pmatrix}.$$

最后, 如果在表达式 $\sum \beta_{i,i'}ds_i ds_{i'}$ 中用某些适当的 $x_1, x_2, x_3$ 的函数代替变量 $s_1, s_2, s_3$, 那么显然我们可以得到所有 $u$ 可以是时间和其他两个变量的函数的情形. 这样一来我们所研究的问题中的第一个问题就得到了完全的解决.

现在留下来就是说明, 何时表达式 $\sum \beta_{i,i'}ds_i ds_{i'}$ 能转换成前面所给出的形式 $\sum \alpha_{i,i'}dx_i dx_{i'}$.

# 第 二 部 分

### 关于将表达式 $\sum\limits_{i,i'} b_{i,i'}ds_i ds_{i'}$ 变换成给定的形式 $\sum\limits_{i,i'} a_{i,i'}dx_i dx_{i'}$

因为在要研究的问题中, 最著名的科学院提出要限于那种情况, 物体是均匀的, 其中的导热系数为常数, 所以我们首先来建立保证能够通过将变量 $s$ 代换成变量 $x$

的方法, 将表达式 $\sum_{i,i'} b_{i,i'}ds_i ds_{i'}$ 变换成形式 $\sum_{i,i'} a_{i,i'}dx_i dx_{i'}$, 其中系数 $a_{i,i'}$ 为常数的条件. 然后再对变换到有变系数的形式作简短的说明.

如果, 正如我们所假设的, 表达式 $\sum_{i,i'} a_{i,i'}dx_i dx_{i'}$ 是变量 $dx$ 的正定形式, 那么, 众所周知, 它总是可以变换到 $\sum_i dx_i^2$ 的形式. 因此, $\sum_{i,i'} b_{i,i'}ds_i ds_{i'}$ 既然能化成 $\sum_{i,i'} a_{i,i'}dx_i dx_{i'}$ 的形式, 那么也就能化成 $\sum_i dx_i^2$ 的形式, 反之亦然. 因此我们面临的任务就是说明, 何时能将所考察的表达式化到 $\sum_i dx_i^2$ 的形式.

我们来用 $B$ 表行列式 $\sum \pm b_{1,1}b_{2,2}\cdots b_{n,n}$, 用 $\beta_{i,i'}$ 表它的子行列式, 使得有 $\sum_i \beta_{i,i'}b_{i,i'} = B$ 以及在 $i' \neq i''$, 时有 $\sum_i \beta_{i,i'}b_{i,i''} = 0$.

既然等式 $\sum_{i,i'} b_{i,i'}ds_i ds_{i'} = \sum_i dx_i^2$ 在某种合适的 $dx$ 的值下成立, 那么用 $d+\delta$ 来代替 $d$, 我们就还能在适当的 $dx$ 与 $\delta x$ 值之下得到 $\sum_{i,i'} b_{i,i'}ds_i\delta s_{i'} = \sum dx_i \delta x_i$.

由此, 注意到如果 $ds_i$ 用 $dx_i$ 来表示, 而 $\delta x_i$ 用 $\delta s_i$ 来表示, 就推得

$$\frac{\partial x_{\nu'}}{\partial s_\nu} = \sum_i b_{\nu,i}\frac{\partial s_i}{\partial x_{\nu'}} \tag{1}$$

以及

$$\frac{\partial s_i}{\partial x_{\nu'}} = \sum_\nu \frac{\beta_{\nu,i}}{B}\frac{\partial x_{\nu'}}{\partial s_\nu}. \tag{2}$$

由此, 借助于等式

$$\sum_\nu \frac{\partial s_i}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial s_i} = 1 \quad 以及 \quad \sum_\nu \frac{\partial s_i}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial s_{i'}} = 0, \quad 如果\ i' \neq i'',$$

我们就进一步得到

$$\begin{aligned} \sum_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial s_i}\frac{\partial x_\nu}{\partial s_{i'}} &= b_{i,i'}, \\ \sum_\nu \frac{\partial s_i}{\partial x_\nu}\frac{\partial s_{i'}}{\partial x_\nu} &= \frac{\beta_{i,i'}}{B}, \end{aligned} \tag{3}$$

而且, 微分公式 (3) 就得到

$$\sum_\nu \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_i \partial s_{i''}}\frac{\partial x_\nu}{\partial s_{i'}} + \sum_\nu \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_{i'}\partial s_{i''}}\frac{\partial x_\nu}{\partial s_i} = \frac{\partial b_{i,i}}{\partial s_{i''}}. \tag{4}$$

由对于下述各量

$$\frac{\partial b_{i,i'}}{\partial s_{i''}}, \quad \frac{\partial b_{i,i''}}{\partial s_{i'}}, \quad \frac{\partial b_{i',i''}}{\partial s_i},$$

类似的表达式可以推得关系式

$$2\sum_{\nu}\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_{i'}\partial s_{i''}}\frac{\partial x_\nu}{\partial s_i}=\frac{\partial b_{i,i'}}{\partial s_{i''}}+\frac{\partial b_{i,i''}}{\partial s_{i'}}-\frac{\partial b_{i',i''}}{\partial s_i}, \tag{5}$$

将这个最后得到的表达式用 $p_{i,i',i''}$ 来表示, 我们也就得到

$$2\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_{i'}\partial s_{i''}}=\sum_i \frac{\partial s_i}{\partial x_\nu}p_{i,i',i''}. \tag{6}$$

进一步再对 $p_{i,i',i''}$ 微分就得到

$$\frac{\partial p_{i,i',i''}}{\partial s_{i'''}}-\frac{\partial p_{i,i',i'''}}{\partial s_{i''}}=2\sum_{\nu}\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_{i'}\partial s_{i''}}\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_i\partial s_{i'''}}-2\sum_{\nu}\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_{i'}\partial s_{i'''}}\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_i\partial s_{i''}},$$

并由此, 在将取自公式 (6) 和 (4) 的值代入就推得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 b_{i,i''}}{\partial s_{i'}\partial s_{i'''}}+\frac{\partial^2 b_{i',i'''}}{\partial s_i\partial s_{i''}}-\frac{\partial^2 b_{i,i'''}}{\partial s_{i'}\partial s_{i''}}-\frac{\partial^2 b_{i',i''}}{\partial s_i\partial s_{i'''}}\\&+\frac{1}{2}\sum_{\nu,\nu'}(p_{\nu,i',i'''}p_{\nu',i,i''}-p_{\nu,i,i'''}p_{\nu',i',i''})\frac{\beta_{\nu,\nu'}}{B}=0.\end{aligned} \tag{I}$$

正如我们所看到的, 既然 $\sum\limits_{i,i'} b_{i,i'}ds_i ds_{i'}$ 能化成 $\sum\limits_i dx_i^2$, 函数 $b$ 就应该满足这个方程. 将方程 (2) 的左侧记为

$$(ii',i''i''').$$

为了更好地理解方程 (I) 的意义, 构造下面的表达式

$$\delta\delta\sum b_{i,i'}ds_i ds_{i'}-2d\delta\sum b_{i,i'}ds_i ds_{i'}+dd\sum b_{i,i'}\delta s_i\delta s_{i'},$$

并且二阶变分 $d^2, d\delta, \delta^2$ 这样来确定, 使得下述等式成立

$$\begin{aligned}\delta'\sum b_{i,i'}ds_i ds_{i'}-\delta\sum b_{i,i'}ds_i\delta' s_{i'}-d\sum b_{i,i'}\delta s_i\delta' s_{i'}&=0,\\ \delta'\sum b_{i,i'}ds_i ds_{i'}-2d\sum b_{i,i'}ds_i\delta' s_{i'}&=0,\\ \delta'\sum b_{i,i'}\delta s_i\delta s_{i'}-2\delta\sum b_{i,i'}\delta s_i\delta' s_{i'}&=0,\end{aligned}$$

其中 $\delta'$ 表任意的变分. 在这种情况下所构造的表达式将成为

$$=\sum(ii',i''i''')(ds_i\delta s_{i'}-ds_{i'}\delta s_i)(ds_{i''}\delta s_{i'''}-ds_{i'''}\delta s_{i''}). \tag{II}$$

从所考察的表达式的这种写法显然可见, 在变量变换时它变成按相同的规律所组成的新的形式的表达式. 可是如果系数 $b$ 为常数, 那么在表达式 (II) 中所有系数

变为零. 所以如果只有形式 $\sum\limits_{i,i'} b_{i,i'} ds_i ds_{i'}$ 化成这种带常系数的形式, 则表达式 (II) 肯定会恒等于零.

但是也显然的是, 如果表达式 (II) 不变为零, 则表达式

$$-\frac{1}{2}\frac{\sum(ii',i''i''')(ds_i\delta s_{i'}-ds_{i'}\delta s_i)(ds_{i''}\delta s_{i'''}-ds_{i'''}\delta s_{i''})}{\sum b_{i,i'}ds_ids_{i'}\sum b_{i,i'}\delta s_i\delta s_{i'}-\left(\sum b_{i,i'}ds_i\delta s_{i'}\right)^2} \tag{III}$$

在变量变换下不会改变, 而且在用变分 $ds_i, \delta s_i$ 的线性组合 $\alpha ds_i + \beta\delta s_i, \gamma ds_i + \delta\delta s_i$ 来代替它们时也不会改变. 但是表达式 (III) 的最大值和最小值, 看成量 $ds_i, \delta s_i$ 的函数, 既与表达式 $\sum\limits_{i,i'} b_{i,i'} ds_i ds_{i'}$ 形式无关, 又与变分 $ds_i, \delta s_i$ 的值无关, 这样一来, 根据这些值就可以知道, 两个这种类型的表达式是否可以相互转换.

上述思想可以作几何的解释, 而且, 尽管这种解释是与很不平常的概念相关, 但是, 在此来谈一谈这件事可能也不是不合适的.

表达式 $\sqrt{\sum\limits_{i,i'} b_{i,i'} ds_i ds_{i'}}$ 可以看成是超出我们的直观的 $n$ 维空间的线元. 如果在这个空间的点 $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ 上作所有可能的最短线, 它们的初始方向由比例 $\alpha ds_1 + \beta\delta s_1 : \alpha ds_2 + \beta\delta s_2 : \cdots : \alpha ds_n + \beta\delta s_n$ (并且 $\alpha$ 与 $\beta$ 为任意量) 来表征, 那么这些线就形成某个曲面, 可以把它设想成位于我们直观中的普通空间中的某个曲面. 在这种情况下表达式 (III) 将可成为所述曲面在点 $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ 处的曲率的度量[(1)].

现在转到 $n=3$ 的情形, 我们注意到表达式 (II) 是变量

$$ds_2\delta s_3 - ds_3\delta s_2, \quad ds_3\delta s_1 - ds_1\delta s_3, \quad ds_1\delta s_2 - ds_2\delta s_1$$

的二次形式, 这样我们在这种情况下得到函数 $b$ 必须满足的六个方程, 使得表达式 $\sum\limits_{i,i'} b_{i,i'} ds_i ds_{i'}$ 化成具有常系数形式. 不难应用在这里引进的概念证明这六个方程和它们在一起也是这种约化可能性的充分条件. 此外, 我们还注意到它们之中只有三个是独立的.

---

现在我们回过来研究最著名的科学院所提出的问题, 我们必须在上述六个方程中代入在上面所确立了的所有可能的函数 $b$ 的形式, 并由此求出所有那些情形, 在其中均匀物体中的温度 $u$ 是时间和还只有两个变量的函数.

但是时间的不足不允许我们在此写下这些计算. 因此我们只限于指出必须采用的方法, 列举所提出问题的个别解.

为了简短起见我们只考虑最简单的情形, 这时温度 $u$ 的变化遵守规律

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=aa\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{I}$$

众所周知, 其他的情况很容易约化到这种情形.

情形 $m=1$, 仅在 $u$ 等于常数时的等温线为以下几种情况时才能发生 —— 平行直线, 圆或螺旋线, 这时要适当选取直角坐标 $z, r\cos\varphi, r\sin\varphi$, 使得可以令 $\alpha=r$, $\beta=z+\varphi\cdot\text{const}$.

情形 $m=2$, 出现的条件是 $u=f(\alpha)+\varphi(\beta)$.

情形 $m=3$, 出现的条件是 $u=\alpha e^{\lambda t}+f(\beta)$, 其中 $\lambda$ 为实常数.

最后, 情形 $m=4$, 正如我们在上面所确立的, 这种情形只有在 $u=\alpha e^{\lambda t}+\beta e^{\mu t}+\text{const}$, 或 $u=(\alpha+\beta t)e^{\lambda t}+\text{const}$, 或 $u=f(\alpha)$ 时才有可能出现.

现在我们已经完全确立了函数 $u$ 的所有可能形式, 我们还必须指出, 如果温度 $u$ 不是用形如 $\alpha e^{\lambda t}$ 的公式给出, 那么这时它就只是时间和一个变量的函数, 这时的等温曲面或者是平行的平面, 或者是同轴的柱面, 或者是同心球面. 如果 $u$ 正好就是 $\alpha e^{\lambda t}$, 那么由微分方程 (I) 就推得

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_3^2}=\lambda aa\alpha,$$

由此就出现了第四种可能, 而且此时函数 $\alpha$ 和 $\beta$ 就不难确定, 只是这时不要忽视了 $\alpha e^{\lambda t}$ 和 $\beta e^{\mu t}$ 可以是复共轭量(2).

# Weber 注释

**(1)**

(中译本 271 页) 这些研究包含了对在论文 "论奠定几何学基础之假设" 所表述的结果的一个解析阐述. 问题是寻求能够将一个二阶微分表达式变换成另一个, 特别是具有常系数的二阶微分表达式的条件. 这个问题自从在上述 Riemann 的论文中第一次出现以来已经得到了 Christoffel 与 Lipschitz 的深入研究, 他们从各种不同的途径得到了与 Riemann 所得到的相同的结果 (Crelle's 杂志, 第 70, 71, 72, 82 卷). 后来 R. Beez 也研究了这个课题 (Schlömilch 杂志, 第 20, 21, 24 卷). 与本书第一版中的注释相比, 那份注释是以 R. Dedekind 的一份以前的 (未发表的) 研究为基础的, 把它附加进来的目的只不过是为了使读者能更易于理解 Riemann 对所给出的计算准则的叙述, 在上述工作中提出的思想就可能为阐述得有点儿太短的这一注释打了基础. 因此我们要在这里以更详尽的方式对它重复叙述一遍.

设 $n$ 维空间中的线元平方为

$$ds^2 = \sum_{i,i'} b_{i,i'} ds_i ds_{i'}.$$

因此, 如果以下式表示从任意点 0 到可变点的最短曲线的长度

$$r = \int \sqrt{\sum_{i,i'} b_{i,i'} ds_i ds_{i'}},$$

则确定最短曲线的微分方程为

$$d\sum_i b_{i,\mu}\frac{ds_i}{dr} = \frac{1}{2}dr\sum_{i,i'}\frac{\partial b_{i,i'}}{\partial s_\mu}\frac{ds_i}{dr}\frac{ds_{i'}}{dr} \tag{1}$$

以及

$$\sum_{i,i'} b_{i,i'}\frac{ds_i}{dr}\frac{ds_{i'}}{dr} = 1.$$

设我们要研究 $n$ 维空间在点 0 领域内性态. 设想从它出发向所有方向作最短曲线并且就此借助于代换

$$x_1 = rc_1, x_2 = rc_2, \cdots, x_n = rc_n,$$

引入一组新的变量, 其中量 $c_i$ 的意义是:

$$c_i = \left(\frac{ds_i}{dr}\right)_0,$$

从而在它们之间存在以下关系:

$$\sum_{i,i'} b_{i,i'}^{(0)} c_i c_{i'} = 1,$$

并且它们沿每一条从 0 点发出的最短线为常数. 这些 $c_i$ 是作为微分方程 (1) 的积分常数出现, 而且为了将变量 $x_i$ 表述为原始变量 $s_i$ 的函数, 自然要假设有这个微分方程的完全积分.

这些新变量可以称之为 "一个变动点 $m$ 相对于点 0 的中心坐标", 其特征在于, 它们在点 0 等于零, 并且它们的值在沿着最短曲线移动时与在这条最短线的长度成正比. 这个性质在我们引进一组 $n$ 个这些变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的具有常系数的线性齐次函数来代替它们时仍然保持. 这样我们就可以得到, 正如 Riemann 在他的论几何学的假设一文, II, 2, 279 页中所得到的, $r^2 = \sum x_i^2$. 但是这根本不重要, 所以以后我们不会进一步考虑它.

如果现在线元平方用新变量表示出来为

$$ds^2 = \sum_{i,i'} a_{i,i'} dx_i dx_{i'}$$

那么, 在我们沿一条从 0 发出的最短线前进时, 因而也就可以令 $ds^2 = dr^2$, 容易推得

$$\sum_{i,i'} a_{i,i'} c_i c_{i'} = \sum_{i,i'} a_{i,i'}^{(0)} c_i c_{i'} = 1. \tag{2}$$

将最短线的微分方程用新变量表出, 则对由点 0 发出的最短线就得到

$$d \sum_i a_{\mu,i} c_i = \frac{1}{2} dr \sum_{i,i'} \frac{\partial a_{i,i'}}{\partial x_\mu} c_i c_{i'},$$

由此推得

$$\sum_{i,i'} p_{\mu,i,i'} x_i x_{i'} = 0, \tag{3}$$

其中我们用了下述缩写 (中译本 270 页):

$$p_{\mu,i,i'} = \frac{\partial a_{i,\mu}}{\partial x_{i'}} + \frac{\partial a_{i',\mu}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{i,i'}}{\partial x_\mu}.$$

方程 (3) 也可以写成

$$\sum_{i,i'} \frac{\partial a_{i,i'}}{\partial x_\mu} x_i x_{i'} = 2 \sum_{i,i'} \frac{\partial a_{i,\mu}}{\partial x_{i'}} x_i x_{i'}. \tag{3'}$$

现在为了简洁起见我们令

$$\omega_\mu = \sum_i a_{\mu,i} x_i; \quad \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_\nu} = a_{\mu,\nu} + \sum_i \frac{\partial a_{\mu,i}}{\partial x_\nu} x_i,$$

于是方程 (3′) 就可以写成

$$\omega_\mu + \sum_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x_\mu} x_i = 2 \sum_i \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_i} x_i.$$

再令

$$2\omega = \sum_i \omega_i x_i; \quad 2\frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} = \omega_\mu + \sum_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x_\mu} x_i,$$

由此就得出:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} = \sum_i \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_i} x_i; \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_\nu} + \sum_i \frac{\partial^2 \omega_\mu}{\partial x_i \partial x_\nu} x_i,$$

并由此有:

$$\frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x_\mu} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x_\mu} \right) x_i = 0,$$

由此可见, $\frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x_\mu}$ 为 $-1$ 阶的齐次函数. 我们用 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 来表示这样一个函数, 则我们有

$$f(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n) = t^{-1} f(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

于是由此设系数 $a_{i,i'}$ 及其导数在点 0 具有确定的有限值, 由此得出, 如果令 $t = 0$, 则函数 $f$ 就将恒等于零, 从而有 $\frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_\nu} = \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x_\mu}$. 因此也就有

$$\sum_i \frac{\partial a_{\mu,i}}{\partial x_\nu} x_i = \sum_i \frac{\partial a_{\nu,i}}{\partial x_\mu} x_i.$$

由此借助于方程 (3′) 就得到

$$\sum_{i,i'} \frac{\partial a_{\mu,i}}{\partial x_{i'}} x_i x_{i'} = \sum_{i,i'} \frac{\partial a_{i,i'}}{\partial x_\mu} x_i x_{i'} = 0,$$

并且通过积分最短线的微分方程:

$$\sum_i a_{\mu,i} c_i = \sum_i a_{\mu,i}^{(0)} c_i, \tag{4}$$

或者在乘以 $r$ 之后为

$$\sum_i a_{\mu,i} x_i = \sum_i a_{\mu,i}^{(0)} x_i.$$

所有这些都是恒等方程, 即它们对独立变量 $x_i$ 的任一组值均成立.

设 $t_{i,i'} = t_{i',i}$ 为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的某些个函数, 它及其直至三阶的导数在点 0 全都具有确定的有限值, 并且有以下恒等方程成立:

$$\sum_{i,i'} t_{i,i'} x_i x_{i'} = 0,$$

由此, 如果对它作三次微分, 并在微分后令 $x_i = 0$, 则得到在点 0 有下述方程成立:

$$t_{i,i'} = 0; \quad \frac{\partial t_{i,i'}}{\partial x_{i''}} + \frac{\partial t_{i',i''}}{\partial x_i} + \frac{\partial t_{i,i''}}{\partial x_{i'}} = 0.$$

在此令 $t_{i,i'} = p_{\mu,i,i'}$, 则对点 0 有

$$p_{i,i',i''} = 0; \quad \frac{\partial p_{i,i',i''}}{\partial x_{i'''}} + \frac{\partial p_{i,i'',i'''}}{\partial x_{i'}} + \frac{\partial p_{i,i',i'''}}{\partial x_{i''}} = 0.$$

由对其中第一个加上 $p_{i',i,i''} = 0$ 就得到

$$\frac{\partial a_{i,i'}}{\partial x_{i''}} = 0, \quad 在点 0 处, \tag{5}$$

而由第二个方程得

$$2\left(\frac{\partial^2 a_{i,i'}}{\partial x_{i''}\partial x_{i'''}}+\frac{\partial^2 a_{i,i''}}{\partial x_{i'''}\partial x_{i'}}+\frac{\partial^2 a_{i,i'''}}{\partial x_{i'}\partial x_{i''}}\right)=\frac{\partial^2 a_{i'',i'''}}{\partial x_i\partial x_{i'}}+\frac{\partial^2 a_{i''',i'}}{\partial x_i\partial x_{i''}}+\frac{\partial^2 a_{i',i''}}{\partial x_i\partial x_{i'''}}.$$

将 $i$ 和 $i'$ 对调, 再将二者相加, 并用 $S$ 表其中六个形如 $\dfrac{\partial^2 a_{i,i'}}{\partial x_{i''}\partial x_{i'''}}$ 的偏导数之和, 则推得

$$S=3\left(\frac{\partial^2 a_{i'',i'''}}{\partial x_i\partial x_{i'}}-\frac{\partial^2 a_{i,i'}}{\partial x_{i''}\partial x_{i'''}}\right),$$

以及, 由于将 $i'',i'''$ 与 $i,i'$ 对换时, $S$ 不会改变, 在点 0 处还有:

$$\frac{\partial^2 a_{i'',i'''}}{\partial x_i\partial x_{i'}}=\frac{\partial^2 a_{i,i'}}{\partial x_{i''}\partial x_{i'''}},\tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 a_{i,i'}}{\partial x_{i''}\partial x_{i'''}}+\frac{\partial^2 a_{i,i''}}{\partial x_{i'''}\partial x_{i'}}+\frac{\partial^2 a_{i,i'''}}{\partial x_{i'}\partial x_{i''}}=\frac{\partial^2 a_{i'',i'''}}{\partial x_i\partial x_{i'}}+\frac{\partial^2 a_{i''',i'}}{\partial x_i\partial x_{i''}}+\frac{\partial^2 a_{i',i''}}{\partial x_i\partial x_{i'''}}=0.\tag{7}$$

现在我们把 $a_{i,i'}, \dfrac{\partial a_{i,i'}}{\partial x_{i''}}, \dfrac{\partial^2 a_{i,i'}}{\partial x_{i''}\partial x_{i'''}}$ 都理解为这些量在点 0 处的值. 在这些假设下对从点 0 处发出的一个线元 $ds_0$ 我们有

$$ds_0^2=\sum_{i,i'}a_{i,i'}dx_idx_{i'},$$

而且对一个在其邻近坐标为 (无限小的) $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 点发出的线元 $ds$ 直至包含到二阶项为

$$ds^2=\sum_{i,i'}a_{i,i'}dx_idx_{i'}+\sum_{i,i',i''}\frac{\partial a_{i,i'}}{\partial x_{i''}}x_{i''}dx_idx_{i'}+\frac{1}{2}\sum_{i,i',i,''i'''}\frac{\partial^2 a_{i,i'}}{\partial x_{i''}\partial x_{i'''}}x_{i''}x_{i'''}dx_idx_{i'}.$$

这里根据 (5) 式第二项为零, 从而其第三项

$$\Theta=\frac{1}{2}\sum_{i,i',i,''i'''}\frac{\partial^2 a_{i,i'}}{\partial x_{i''}\partial x_{i'''}}x_{i''}x_{i'''}dx_idx_{i'}$$

就表达了当前的 $n$ 维空间在由 $x_i,dx_i$ 所确定的方向上对平直性的偏离; 因为借助于 (6) 式和 (7) 式可以把这个式子写成这样一种形式, 从中可以看出, 它只与组合 $x_idx_{i'}-x_{i'}dx_i$ 有关. 通过对换中的下标我们可以把它写成以下四种形式:

$$\begin{aligned}\Theta&=\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2 a_{i,i'}}{\partial x_{i''}\partial x_{i'''}}x_{i''}x_{i'''}dx_idx_{i'}\\&=\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2 a_{i',i''}}{\partial x_i\partial x_{i'''}}x_ix_{i'''}dx_{i'}dx_{i''}\\&=\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2 a_{i,i'''}}{\partial x_{i'}\partial x_{i''}}x_{i'}x_{i''}dx_idx_{i'''}\\&=\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2 a_{i'',i'''}}{\partial x_i\partial x_{i'}}x_ix_{i'}dx_{i''}dx_{i'''},\end{aligned}$$

把 (6) 式应用到上面的第四式, 把 (6) 式和 (7) 式应用到上面的第二和第三式, 由此在再一次互换下标后, 就得到

$$\Theta = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2 a_{i,i'}}{\partial x_{i''}\partial x_{i'''}} x_{i''}x_{i'''}dx_i dx_{i'},$$

$$\frac{1}{2}\Theta = -\frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2 a_{i,i'}}{\partial x_{i''}\partial x_{i'''}} x_i x_{i'''}dx_{i'} dx_{i''},$$

$$\frac{1}{2}\Theta = -\frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2 a_{i,i'}}{\partial x_{i''}\partial x_{i'''}} x_{i'} x_{i''}dx_i dx_{i'''},$$

$$\Theta = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2 a_{i,i'}}{\partial x_{i''}\partial x_{i'''}} x_i x_{i'}dx_{i''} dx_{i'''}.$$

把这四个方程加起来就得出

$$\Theta = \frac{1}{6}\sum_{i,i'';i',i'''} \frac{\partial^2 a_{i,i'}}{\partial x_{i''}\partial x_{i'''}}(x_i dx_{i''} - x_{i''}dx_i)(x_{i'}dx_{i'''} - x_{i'''}dx_{i'}). \tag{8}$$

但是 $\Theta$ 的这个表达式只是在 $x_i$ 具有中心坐标的特别的意义下导出的. 现在的任务, 就是把它变换到任意坐标上去. 按照 Riemann 的指示, 这一点可以这样来实现, 就是我们要把它纳入到明显地与所用变量无关的形式.

首先我们在保持中心坐标的条件下用与无限小坐标 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 成正比的微分 $\delta x_1, \delta x_2, \cdots, \delta x_n$ 来代替这些无限小坐标, 因而有

$$\Theta = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2 a_{i,i'}}{\partial x_{i''}\partial x_{i'''}} dx_i dx_{i'}\delta x_{i''}\delta x_{i'''}. \tag{9}$$

我们选通常是完全任意的微分 $dx_i, \delta x_i$, 故有

$$ddx_i = 0, \quad d\delta x_i = 0, \quad \delta dx_i = 0, \quad \delta\delta x_i = 0, \tag{10}$$

而这可以例如通过常数的 $dx_i, \delta x_i$ 来达到, 而这样就会带来 $d$ 和 $\delta$ 可以对换的结果, 即对每一个任意的位置函数 $\varphi$ 有

$$d\delta\varphi = \delta d\varphi. \tag{I}$$

在这些前提下可由 (5) 式, (6) 式, (7) 式导出公式

$$dd\sum_{i,i'} a_{i,i'}\delta x_i\delta x_{i'} = \delta\delta\sum_{i,i'} a_{i,i'}dx_i dx_{i'} = -2d\delta\sum_{i,i'} a_{i,i'}dx_i\delta x_{i'},$$

借助于上式就得到

$$\begin{aligned}\Theta &= \frac{1}{2}dd\sum_{i,i'} a_{i,i'}\delta x_i\delta x_{i'}\\ &= \frac{1}{6}\left\{dd\sum_{i,i'} a_{i,i'}\delta x_i\delta x_{i'} - 2d\delta\sum_{i,i'} a_{i,i'}dx_i\delta x_{i'} + \delta\delta\sum_{i,i'} a_{i,i'}dx_i dx_{i'}\right\}.\end{aligned} \tag{II}$$

如果 $\delta'$ 表只能与 $d$ 和 $\delta$ 可对换的一个任意的变分, 那么由 (5) 式和 (10) 式就给出下述方程:

$$\begin{aligned}\delta'\sum_{i,i'}a_{i,i'}dx_i\delta x_{i'} &= \sum_{i,i'}a_{i,i'}d\delta'x_i\delta x_{i'}+\sum_{i,i'}a_{i,i'}dx_i\delta\delta'x_{i'},\\ d\sum_{i,i'}a_{i,i'}\delta'x_i\delta x_{i'} &= \sum_{i,i'}a_{i,i'}d\delta'x_i\delta x_{i'},\\ \delta\sum_{i,i'}a_{i,i'}dx_i\delta'x_{i'} &= \sum_{i,i'}a_{i,i'}dx_i\delta\delta'x_{i'},\end{aligned}$$

由此推得:

$$\delta'\sum_{i,i'}a_{i,i'}dx_i\delta x_{i'}-d\sum_{i,i'}a_{i,i'}\delta'x_i\delta x_{i'}-\delta\sum_{i,i'}a_{i,i'}dx_i\delta'x_{i'}=0, \tag{III}$$

而如果我们令 $d=\delta$, 则有:

$$\delta'\sum_{i,i'}a_{i,i'}dx_idx_{i'}-2d\sum_{i,i'}a_{i,i'}dx_i\delta'x_{i'}=0, \tag{IV}$$

$$\delta'\sum_{i,i'}a_{i,i'}\delta x_i\delta x_{i'}-2\delta\sum_{i,i'}a_{i,i'}\delta x_i\delta'x_{i'}=0, \tag{V}$$

如果我们引进别的变量 $s_i$ 来代替作为函数自变量的 $x_i$, 则对完全任意的微分 $d$ 和 $\delta$ 有下述变换

$$\sum_{i,i'}a_{i,i'}dx_i\delta x_{i'}=\sum_{i,i'}b_{i,i'}ds_i\delta s_{i'},$$

因而通过在 (II) 中用 $b_{i,i'},s_i$ 来代替 $a_{i,i'},x_i$, 或者换言之, 就是我们不再把在 (II) 中的 $x_i$ 看成是中心坐标, 而是理解为任意坐标, 则我们就会得到 $\Theta$ 一个变换后的表达式. 自然这样一来条件 (5), (6), (7), (10) 就不再能成立了, 但是条件 (I), (III), (IV), (V), 一旦对一个坐标系, 例如, 中心坐标成立, 就会对所有的坐标系成立. 因此如果我们在对 (II) 作进一步的变换, 除了 (I), (III), (IV), (V) 之外没有用到别的关系, 则所得结果就对任意变量均成立. 这个计算, 尽管有点儿长, 却一点也不难. 如果计算 (II) 的右侧, 只需用到微分的可对换性就可将三阶微分消除. 借助于由 (III), (IV), (V) 导出的方程

$$\begin{aligned}2\sum_{i}a_{i,i'}ddx_i &= -\sum_{i,i'}p_{\nu,i,i'}dx_idx_{i'},\\ 2\sum_{i}a_{i,i'}d\delta x_i &= -\sum_{i,i'}p_{\nu,i,i'}dx_i\delta x_{i'},\\ 2\sum_{i}a_{i,i'}\delta\delta x_i &= -\sum_{i,i'}p_{\nu,i,i'}\delta x_i\delta x_{i'},\end{aligned}$$

其中 $p_{\nu,i,i'}$ 和在中译本 270 页上所表示的一样为

$$p_{\nu,i,i'}=\frac{\partial a_{\nu,i}}{\partial x_{i'}}+\frac{\partial a_{\nu,i'}}{\partial x_i}-\frac{\partial a_{i,i'}}{\partial x_\nu},$$

从而得到了表达式

$$\begin{aligned}&dd\sum_{i,i'}a_{i,i'}\delta x_i\delta x_{i'}-2d\delta\sum_{i,i'}a_{i,i'}dx_i\delta x_{i'}+\delta\delta\sum_{i,i'}a_{i,i'}dx_idx_{i'}\\=&\sum_{ii',i''i'''}(ii',i''i''')(dx_i\delta x_{i'}-\delta x_idx_{i'})(dx_{i''}\delta x_{i'''}-\delta x_{i''}dx_{i'''}),\end{aligned}$$

其中 $(ii',i''i''')$ 的意义和在 Riemann 文本 (中译本 270 页) 中的一样, 而且其求和是这样来做, 对两对下标 $i,i'$ 和 $i',i$ 以及 $i'',i'''$ 和 $i''',i''$ 也一样, 只保留其中一对.

现在我们来由这个表达式得出我们的一般空间的曲率. 设

$$ds=\sqrt{\sum_{i,i'}a_{i,i'}dx_idx_{i'}},\quad \delta s=\sqrt{\sum_{i,i'}a_{i,i'}\delta x_i\delta x_{i'}}$$

为这个空间中的两个线元, 它们所夹角的余弦为

$$\frac{\sum\limits_{i,i'}a_{i,i'}dx_i\delta x_{i'}}{ds\delta s}=\cos\vartheta.$$

于是它们组成的无限小的三角形的面积为

$$\Delta=\frac{1}{2}ds\delta s\sin\vartheta$$

并由此得

$$\begin{aligned}4\Delta^2&=\sum_{i,i'}a_{i,i'}dx_idx_{i'}\sum_{i,i'}a_{i,i'}\delta x_i\delta x_{i'}-\left(\sum_{i,i'}a_{i,i'}dx_i\delta x_{i'}\right)^2\\&=\sum_{ii',i''i'''}(a_{i,i''}a_{i',i'''}-a_{i',i''}a_{i,i'''})(dx_i\delta x_{i'}-\delta x_idx_{i'})(dx_{i''}\delta x_{i'''}-\delta x_{i''}dx_{i'''}),\\&-\frac{3}{8}\frac{dd\sum\limits_{i,i'}a_{i,i'}\delta x_i\delta x_{i'}}{\Delta^2},\\&=-\frac{1}{2}\frac{dd\sum\limits_{i,i'}a_{i,i'}\delta x_i\delta x_{i'}-2d\delta\sum\limits_{i,i'}a_{i,i'}dx_i\delta x_{i'}+\delta\delta\sum\limits_{i,i'}a_{i,i'}dx_idx_{i'}}{\sum\limits_{i,i'}a_{i,i'}dx_idx_{i'}\sum\limits_{i,i'}a_{i,i'}\delta x_i\delta x_{i'}-\left(\sum\limits_{i,i'}a_{i,i'}dx_i\delta x_{i'}\right)^2}\\&=-\frac{1}{2}\frac{\sum\limits_{ii',i''i'''}(ii',i''i''')(dx_i\delta x_{i'}-\delta x_idx_{i'})(dx_{i''}\delta x_{i'''}-\delta x_{i''}dx_{i'''})}{\sum\limits_{ii',i''i'''}(a_{i,i''}a_{i',i'''}-a_{i,i'''}a_{i',i''})(dx_i\delta x_{i'}-\delta x_idx_{i'})(dx_{i''}\delta x_{i'''}-\delta x_{i''}dx_{i'''})}.\end{aligned}$$

现在还要证明, 如果我们考察的曲面是由这样一些最短线构成, 在它们的起始线元中 $x$ 的变分有如下的比例关系

$$\alpha dx_1 + \beta\delta x_1 : \alpha dx_2 + \beta\delta x_2 : \cdots : \alpha dx_n + \beta\delta x_n,$$

其中 $\alpha$ 与 $\beta$ 为任意量, 那么这个表达式就与 Gauß 为这种曲面的曲率所构造的表达式一致.

和在上面一样我们这样来令 $x_i = rc_i$, 使得其中 $c_i$ 在每一条从点 0 发出的最短线上为常数, 而 $r$ 为这条最短线到一不定点的长度. 于是, 如在上面所证明的, 有

$$\sum_{i,i'} a_{i,i'} c_i c_{i'} = \sum_{i,i'} a_{i,i'}^{(0)} c_i c_{i'} = 1.$$

取 $c_i$ 的两组固定值 $c_i^{(0)}$ 和 $c_i'$ 为基础, 并考察一变动组

$$c_i = \alpha c_i^{(0)} + \beta c_i', \tag{11}$$

于是有

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta\cos(r^{(0)}, r') + \beta^2 = 1,$$

由此量 $c_i$ 变成了单个变量的函数, 我们可以取 $r$ 的起始线元与 $r^{(0)}$ 的起始线元的夹角 $\varphi$ 作这个变量, 并由上式得到

$$\cos\varphi = \sum_{i,i'} a_{i,i'}^{(0)} c_i c_{i'}^{(0)}.$$

如果现在让量 $r, c_i$ 变化一个满足下述条件

$$\sum_{i,i'} a_{i,i'}^{(0)} c_i dc_{i'} = 0$$

的无穷小量 $dr, dc_i$, 那么借助于方程 (4) 就可以得到

$$\sum_{i,i'} a_{i,i'} c_i dc_{i'} = \sum_{i,i'} a_{i,i'}^{(0)} c_i dc_{i'} = 0. \tag{12}$$

此外我们还有

$$dx_i = rdc_i + c_i dr,$$

因而, 在我们采用了缩写

$$\sum_{i,i'} a_{i,i'} dc_i dc_{i'} = \mu d\varphi^2,$$

之后, 就有

$$ds^2 = \sum_{i,i'} a_{i,i'} dx_i dx_{i'} = dr^2 + r^2 \sum_{i,i'} a_{i,i'} dc_i dc_{i'} = dr^2 + r^2 \mu d\varphi^2.$$

可是我们又有:

$$\cos\varphi = \sum_{i,i'} a_{i,i'}^{(0)} c_i c_{i'}^{(0)}, \quad -\sin\varphi d\varphi = \sum_{i,i'} a_{i,i'}^{(0)} c_i^{(0)} dc_{i'}, \tag{13}$$

并且由 (11) 式可推得下述表达式

$$dc_i = ac_i^{(0)} + bc_i; \quad a = \beta d\alpha - \alpha d\beta, \quad b = d\beta,$$

因而由 (12) 式和 (13) 式得

$$-\sin\varphi d\varphi = a + b\cos\varphi,$$
$$0 = a\cos\varphi + b.$$

由此通过消去 $a$ 和 $b$ 就得到:

$$\sin\varphi dc_i = d\varphi(c_i\cos\varphi - c_i^{(0)}).$$

由此进一步又推得

$$d\varphi^2 = \sum_{i,i'} a_{i,i'}^{(0)} dc_i dc_{i'},$$

并同时有

$$\mu = \frac{\sum_{i,i'} a_{i,i'} dc_i dc_{i'}}{\sum_{i,i'} a_{i,i'}^{(0)} dc_i dc_{i'}}. \tag{14}$$

如果我们用 $\frac{m^2}{r^2}$ 来表示这个表达式, 那么我们就会得到一个形式, 它就是 Gauß 当年对一任意曲面上的线元所给出过的, 即:

$$ds^2 = dr^2 + m^2 d\varphi^2$$

《曲面一般理论》, 19 节), 而对于曲率则有公式

$$k = -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial r^2}.$$

如果这个曲面在点 $r=0$ 是连续弯曲的, 则在此点有

$$m = 0, \quad \frac{\partial m}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial^2 m}{\partial r^2} = 0,$$

从而在该点就有

$$k = -\frac{\partial^3 m}{\partial r^3}.$$

对于函数就由此得出它在这同一点有

$$\mu = 1, \quad \frac{\partial \mu}{\partial r} = 0, \quad k = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mu}{\partial r^2}.$$

因而这些方程中的头两个满足 (14) 式, (5) 式; 由其第三式得到

$$k=-\frac{3}{2}\frac{\sum\limits_{ii',i''i'''}\left(\frac{\partial^2 a_{i,i'}}{\partial x_{i''}\partial x_{i'''}}\right)_0 c_{i''}c_{i'''}dc_idc_{i'}}{\sum\limits_{i,i'}a_{i,i'}^{(0)}dc_idc_{i'}},$$

它和上面所求得的表达式是一致的.

如果我们构作从点 0 发出的各个方向的最短线, 其初始方向由方程 (11) 所确定, 那么我们就会得到在超越空间中的一块曲面, 这个曲面上的一个点的坐标可以用两个独立变量来表示, 而如果我们用 $p, q$ 来表示它们的话, 那么就可得到这个曲面上的线元平方的表达式为

$$ds^2=Edp^2+2Fdpdq+Gdq^2,$$

其中 $E, F, G$ 为 $p$ 和 $q$ 的函数. 如果取 $x, y, z$ 为下述联立偏微分方程

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2=E,\\ \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}+\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}=F,\\ \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2=G\end{gathered}$$

的一组特解, 那么就有

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2,$$

而且如果把 $x, y, z$ 理解为我们空间中的一个点的坐标, 那么我们就会得到一个曲面, 可以将超越空间中的曲面按照 Riemann 的表达方式, 即不用逐点地改变线元的方式展布在它上面.

人们可以在常曲率的假设下很容易地从此式导出线元 (可参见本书附录 III —— 中译者注) 所给出的表达式. 也就是说如果 $k$ 具有常数值 $\alpha$, 则有

$$m=\frac{\sin\sqrt{\alpha}r}{\sqrt{\alpha}},$$

而且如果我们假设引进它们的这样的线性组合来作 $c_i$, 使得有

$$\sum c_i^2=1,$$

因而有

$$d\varphi^2=\sum dc_i^2,$$

这样一来对 $ds^2$ 就得到

$$ds^2 = dr^2 + \frac{\sin^2\sqrt{\alpha}r}{\alpha}\sum dc_i^2.$$

因此我们如果设 (这包括了球面到平面上的球极平面投影作为其特例)

$$x_i = \frac{2c_i}{\sqrt{\alpha}}\tan\frac{\sqrt{\alpha}r}{2}, \quad \sum x_i^2 = \frac{4}{\alpha}\tan^2\frac{\sqrt{\alpha}}{2}r,$$

则可推得

$$\sum dx_i^2 = \frac{dr^2}{\cos^4\frac{\sqrt{\alpha}}{2}r} + \frac{4}{\alpha}\tan^2\frac{\sqrt{\alpha}}{2}r\cdot\sum dc_i^2,$$

以及

$$\begin{aligned} ds &= \cos^2\frac{\sqrt{\alpha}}{2}r\sqrt{\sum dx_i^2} \\ &= \frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\sum x_i^2}\sqrt{\sum dx_i^2}. \end{aligned}$$

**(2)**

(本文中译本 271 页) 全面验证这里所确立的结论看来还需要复杂的计算, 我从现存很不完整的零碎资料只能部分完成这个任务. 我之所以这样做部分是因为我带着这样的期望, 希望它能成为全面导出这个结果的再一次研究的基础.

我们首先来回答这样的问题, 其中温度除了与时间有关外还只与一个变量有关. 在这种情况下热运动所满足的偏微分方程具有以下的形式

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + b\frac{\partial u}{\partial\alpha} = \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{1}$$

如果系数 $a, b$ 不只是单个变量 $\alpha$ 的函数, 则将这个微分方程分解为下面两个方程

$$a'\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + b'\frac{\partial u}{\partial\alpha} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad a''\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + b''\frac{\partial u}{\partial\alpha} = 0,$$

其中 $a', b', a'', b''$ 只与 $\alpha$ 有关.

通过引进一个新的变量来代替 $\alpha$, 则就可将上面的第二个方程变成 $\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} = 0$ 形式, 从而就成为含 $u_1\alpha + u_2$ 的形式, 其中 $u_1, u_2$ 只仅是时间的函数. 于是上面的第一个方程就取下述形状

$$(c\alpha + c_1)\frac{\partial u}{\partial\alpha} = \frac{\partial u}{\partial t},$$

其中 $c, c_1$ 为常数. 由此就进一步推得

$$c_1 u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t}, \quad 0 = \frac{\partial u_2}{\partial t},$$

因而就具有 $\alpha e^{\lambda t}+\text{const}$ 的形式.

但是如果在微分方程 (1) 中系数 $a, b$ 就已经只是 $\alpha$ 的函数, 那么我们就不妨一般地取 $b=0$ (通过为 $\alpha$ 引进一个新的变量), 并且由于偏微分方程 (1) 必定能由方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$$

通过变换得出, 所以我们的问题就归结为:

求出所有同时满足下述两个偏微分方程的、坐标 $x, y, z$ 的函数 $\alpha$:

$$\Delta=\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2}=0, \quad D=\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)^2=f(\alpha).$$

为简短起见我们令:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}=p, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y}=q, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial z}=r, \quad p^2+q^2+r^2=m,$$

并且分以下四种情形分别讨论:

1. 如果 $p, q, r$ 是相互独立的、坐标 $x, y, z$ 的函数, 那么 $\alpha$ 就会是 $m$ 的函数, $\varphi(m)$, 于是我们就可以将 $p, q, r$ 作为独立变量引入来代替 $x, y, z$. 令

$$s=\alpha-px-qy-rz, \quad ds=-xdp-ydq-zdr,$$

则有:

$$x=-\frac{\partial s}{\partial p}, \quad y=-\frac{\partial s}{\partial q}, \quad z=-\frac{\partial s}{\partial r},$$
$$\alpha=s-p\frac{\partial s}{\partial p}-q\frac{\partial s}{\partial q}-r\frac{\partial s}{\partial r}=\varphi(m).$$

令

$$s=\psi(m)+t,$$

并由下述微分方程来确定函数 $\psi(m)$

$$\psi(m)-2m\psi'(m)=\varphi(m),$$

则得到 $t$ 的一阶偏微分方程

$$t-p\frac{\partial t}{\partial p}-q\frac{\partial t}{\partial q}-r\frac{\partial t}{\partial r}=0,$$

它的一般解为:

$$t=p\chi\left(\frac{q}{p}, \frac{r}{p}\right)=p\chi(\beta, \gamma),$$

其中 $\chi$ 为一任意函数, 并且采用了缩写:

$$\beta=\frac{q}{p},\quad \gamma=\frac{r}{p}.$$

于是我们有了

$$\begin{aligned}-x&=\frac{\partial s}{\partial p}=2p\psi'(m)+\chi-\beta\chi'(\beta)-\gamma\chi'(\gamma),\\-y&=\frac{\partial s}{\partial q}=2q\psi'(m)+\chi'(\beta),\\-z&=\frac{\partial s}{\partial r}=2r\psi'(m)+\chi'(\gamma),\end{aligned}\tag{2}$$

现在通过引入 $p,q,r$ 作为独立变量, 可由方程

$$\Delta=\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial z}=0,$$

推得

$$\frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{\partial z}{\partial q}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial p}-\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial p}+\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}-\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}=0,$$

通过用 (2) 式代换得

$$\begin{aligned}&m(12\psi'(m)^2+16m\psi'(m)\psi''(m))\\&+\sqrt{m}(4\psi'(m)+4m\psi''(m))\sqrt{1+\beta^2+\gamma^2}\left\{(\beta^2+1)\frac{\partial^2\chi}{\partial\beta^2}+2\beta\gamma\frac{\partial^2\chi}{\partial\beta\partial\gamma}+(\gamma^2+1)\frac{\partial^2\chi}{\partial\gamma^2}\right\}\\&+(1+\beta^2+\gamma^2)^2\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial\gamma^2}-\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial\beta\partial\gamma}\right)^2\right)=0,\end{aligned}$$

而由于 $m,\beta,\gamma$ 是相互无关的变量, 所以这个方程可以分裂为下述三个方程:

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial\gamma^2}-\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial\beta\partial\gamma}\right)^2=\frac{k}{(1+\beta^2+\gamma^2)^2},\tag{3}$$

$$(\beta^2+1)\frac{\partial^2\chi}{\partial\beta^2}+2\beta\gamma\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial\beta\partial\gamma}\right)+(\gamma^2+1)\frac{\partial^2\chi}{\partial\gamma^2}=\frac{k_1}{\sqrt{1+\beta^2+\gamma^2}},\tag{4}$$

$$m(12\psi'(m)^2+16m\psi'(m)\psi''(m))+k_1\sqrt{m}(4\psi'(m)+4m\psi''(m))+k=0,\tag{5}$$

其中 $k,k_1$ 为不定常数. 如果通过方程

$$\chi=\frac{1}{2}k_1\sqrt{1+\beta^2+\gamma^2}+\chi_1$$

引进一个新的函数 $\chi_1$ 来代替函数 $\chi$, 那么方程 (3), (4) 就转换为

$$\frac{\partial^2\chi_1}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2\chi_1}{\partial\gamma^2}-\left(\frac{\partial^2\chi_1}{\partial\beta\partial\gamma}\right)^2=\frac{k'}{(1+\beta^2+\gamma^2)^2},\tag{6}$$

$$(\beta^2+1)\frac{\partial^2\chi_1}{\partial\beta^2}+2\beta\gamma\left(\frac{\partial^2\chi_1}{\partial\beta\partial\gamma}\right)+(\gamma^2+1)\frac{\partial^2\chi_1}{\partial\gamma^2}=0.\tag{7}$$

但是这两个方程只有当 $\chi_1$ 是 $\beta,\gamma$ 的线性函数时才能同时成立, 因而此时有 $k'=0$; 接着我们把

$$\chi_1-\beta\frac{\partial\chi_1}{\partial\beta}-\gamma\frac{\partial\chi_1}{\partial\gamma},\frac{\partial\chi_1}{\partial\beta},\frac{\partial\chi_1}{\partial\gamma}$$

看成是直角坐标, 则方程 (6) 就是常曲率曲面的偏微分方程, 而 (7) 式则为一极小曲面的偏微分方程, 众所周知, 这是只有平面才可能同时具有的两个性质.

由此得出对于 $\chi$ 有下述形式的表达式:

$$\chi=a+b\beta+c\gamma+\frac{1}{2}k_1\sqrt{1+\beta^2+\gamma^2},$$

其中 $a,b,c$ 为常数, 而且方程 (2) 变成形下述形式:

$$x+a=-\frac{\frac{1}{2}k_1+2\sqrt{m}\psi'(m)}{\sqrt{1+\beta^2+\gamma^2}},$$

$$y+b=-\frac{\left(\frac{1}{2}k_1+2\sqrt{m}\psi'(m)\right)\beta}{\sqrt{1+\beta^2+\gamma^2}},$$

$$z+c=-\frac{\left(\frac{1}{2}k_1+2\sqrt{m}\psi'(m)\right)\gamma}{\sqrt{1+\beta^2+\gamma^2}},$$

$$(x+a)^2+(y+b)^2+(z+c)^2=\left(\frac{1}{2}k_1+2\sqrt{m}\psi'(m)\right)^2,$$

由此得出曲面 $\alpha=\text{const}$, 或 $m=\text{const}$, 为同心球面.

2. 如果在 $p,q,r$ 之间存在一个不含坐标 $x,y,z$ 的方程, 则 $r$ 可以看成是 $p,q$ 的函数, 从而我们就有

$$dr=adp+bdq,$$

其中我们设定了

$$a=\frac{\partial r}{\partial p},\quad b=\frac{\partial r}{\partial q},\quad \frac{\partial a}{\partial q}=\frac{\partial b}{\partial p}.$$

由此推出

$$\frac{\partial p}{\partial z}=a\frac{\partial p}{\partial x}+b\frac{\partial p}{\partial y},\quad \frac{\partial q}{\partial z}=a\frac{\partial q}{\partial x}+b\frac{\partial q}{\partial y},\quad \frac{\partial r}{\partial z}=a\frac{\partial r}{\partial x}+b\frac{\partial r}{\partial y}.$$

如果现在不是有

$$p^2+q^2+r^2=\text{const},\tag{8}$$

则 $\alpha$ 也将和 $p,q,r$ 一样依赖于两个变量, 而且由此得出:

$$r=ap+bq,$$

并且通过微分得到:

$$p\frac{\partial a}{\partial p}+q\frac{\partial b}{\partial p}=0,\quad p\frac{\partial a}{\partial q}+q\frac{\partial b}{\partial q}=0,$$

$$\frac{\partial a}{\partial p}\frac{\partial b}{\partial q}-\frac{\partial a}{\partial q}\frac{\partial b}{\partial p}=0. \tag{9}$$

如果现在我们在方程 (8) 成立的情况下也像刚才一样, 设

$$s=\alpha-xp-yq-zr,$$

$$ds=-xdp-ydq-zdr=-(x+az)dp-(y+bz)dq,$$

那么就得出 $s$ 也只与 $p,q$ 有关, 并由此给出

$$\frac{\partial s}{\partial p}=-(x+az),\quad \frac{\partial s}{\partial q}=-(y+bz). \tag{10}$$

现在我们来在方程

$$\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial z}=0$$

中将 $p,q,z$ 作为独立变量引进来, 那么推出

$$\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\partial y}{\partial q}-a\left(\frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial x}{\partial z}-\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial y}{\partial z}\right)-b\left(\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial z}-\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial z}\right)=0,$$

由此借助于 (10) 式就得到

$$z\left\{\frac{\partial a}{\partial p}(1+b^2)-ab\left(\frac{\partial a}{\partial q}+\frac{\partial b}{\partial p}\right)+\frac{\partial b}{\partial q}(1+a^2)\right\}$$
$$+\frac{\partial^2 s}{\partial p^2}(1+b^2)-2ab\frac{\partial^2 s}{\partial p\partial q}+\frac{\partial^2 s}{\partial q^2}(1+a^2)=0.$$

现在因为 $a,b,s$ 与 $z$ 无关, 所有这个方程分解为下面两个方程:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial p^2}(1+b^2)-2ab\frac{\partial^2 s}{\partial p\partial q}+\frac{\partial^2 s}{\partial q^2}(1+a^2)=0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial a}{\partial p}(1+b^2)-ab\left(\frac{\partial a}{\partial q}+\frac{\partial b}{\partial p}\right)+\frac{\partial b}{\partial q}(1+a^2)=0. \tag{12}$$

如果我们现在把 $p,q,r$ 看成是直角坐标, 那么 (12) 式就是极小曲面的偏微分方程, 根据 (8) 式和 (9) 式它们又必定是球面或可展成平面的曲面. 只有当这个曲面是平面时才能把这二者结合起来, 从而 $a,b$ 为常数, 而通过适当地确定 $z$ 轴的方向就可以取其为零. 这样一来由 (11) 式就得到

$$\frac{\partial^2 s}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial q^2}=0, \tag{13}$$

此外, 如果令 $\beta = \frac{p}{q}$, 那么和在第一种情形中一样, 有

$$
\begin{aligned}
s &= \psi(m) + p\chi\left(\frac{q}{p}\right), \\
m &= p^2 + q^2, r = 0, \\
-x &= \frac{\partial s}{\partial p} = \psi'(m)2p + \chi(\beta) - \beta\chi'(\beta), \\
-y &= \frac{\partial s}{\partial q} = \psi'(m)2q + \chi'(\beta).
\end{aligned}
$$

因此由 (13) 式推得

$$\sqrt{m}(4\psi'(m) + 4m\psi''(m)) + (1+\beta^2)^{\frac{3}{2}}\chi''(\beta) = 0,$$

这方程可以分解为下面两个方程:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{m}(4\psi'(m) + 4m\psi''(m)) &= -k, \\
\chi''(\beta) &= \frac{k}{\sqrt{(1+\beta^2)^3}},
\end{aligned}
$$

其中 $k$ 为常数. 积分后方程就给出

$$\chi(\beta) = k\sqrt{1+\beta^2} + a + b\beta,$$

其中 $a, b$ 为任意常数. 这样一来我们就得到了

$$
\begin{aligned}
x + a &= -\frac{2\psi'(m)\sqrt{m} + k}{\sqrt{1+\beta^2}}, \\
y + b &= -\frac{(2\psi'(m)\sqrt{m} + k)\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}, \\
(x+a)^2 + (y+b)^2 &= (2\psi'(m)\sqrt{m} + k)^2.
\end{aligned}
$$

于是等温曲面在这种情况下就是一些同轴的柱面, 其截面为圆.

第三种情况, 其中 $p, q, r$ 是同一个变量的函数, 不可能出现. 假如说有

$$p = \psi_1(\mu), \quad q = \psi_2(\mu), \quad r = \psi_3(\mu),$$

则由方程

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial z}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}; \\
\psi_1'(\mu) : \psi_2'(\mu) : \psi_3'(\mu) = \frac{\partial \mu}{\partial x} : \frac{\partial \mu}{\partial y} : \frac{\partial \mu}{\partial z}
\end{aligned}
$$

以及方程 $\Delta=0$, 就得出

$$\psi_1'(\mu)\frac{\partial\mu}{\partial x}+\psi_2'(\mu)\frac{\partial\mu}{\partial y}+\psi_3'(\mu)\frac{\partial\mu}{\partial z}=0,$$

而这是矛盾的.

因而现在剩下来就是第四种情况, $p,q,r$ 均为常数的情况, 于是等温曲面族由平行平面组成.

---

关于更一般的问题, 何时温度除了时间之外只与两个变量有关, 其第一种情况, 这在正文中是用 $m=1$ 来表征的, 可以用下述方式来回答.

在这种情况下我们有二次形式如下:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix},$$

其中 $a',b'$ 为 $\gamma$ 的函数, 而 $c'$ 与 $\gamma$ 无关. 此外行列式

$$\begin{vmatrix} 0, & c', & b' \\ c', & 0, & a' \\ b', & a', & c \end{vmatrix}=2a'b'c'-cc'c',$$

为常数. 其伴随形式为

$$-(a'd\alpha+b'd\beta-c'd\gamma)^2+2(2a'b'-cc')d\alpha d\beta,$$

其中 $2a'b'-cc'$ 与 $\gamma$ 无关.

现在我们通过引进 $\gamma$ 的一个线性函数作为新变量来代替 $\gamma$, 这个形式就会变换得更简单一些, 如下:

$$(ad\alpha+cd\gamma)^2+2md\alpha d\beta$$

其中 $a$ 是 $\gamma$ 的一个线性函数, $c$ 和 $m$ 与 $\gamma$ 无关. 现在要做的是寻求这样一种情形, 在这个情形下这个形式能够转换成带常系数的形式, 或者特别地转换成 $dx^2+dy^2+dz^2$ 的形式.

为此我们来作方程 $(ii',i''i''')=0$ (本文中译本 270 页), 它在这种情况下取以下形式:

$$m\frac{\partial^2 c}{\partial\beta^2}-\frac{\partial c}{\partial\beta}\frac{\partial m}{\partial\beta}=0, \qquad (1,1)$$

$$mc\left(\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2 a}{\partial\alpha\partial\gamma}\right)+\left(\frac{\partial a}{\partial\gamma}-\frac{\partial c}{\partial\alpha}\right)\left(c\frac{\partial m}{\partial\alpha}+m\frac{\partial a}{\partial\gamma}\right)=0, \qquad (2,2)$$

$$2mc\left(\frac{\partial^2 a}{\partial\beta^2}-2\frac{\partial^2 m}{\partial\alpha\partial\beta}\right)+4c\frac{\partial m}{\partial\beta}\left(\frac{\partial m}{\partial\alpha}-a\frac{\partial a}{\partial\beta}\right)-\frac{m}{c}\left(\frac{\partial ac}{\partial\beta}\right)^2=0, \qquad (3,3)$$

$$2mc\left(\frac{\partial^2 a^2}{\partial\beta\partial\gamma}-\frac{\partial^2 ac}{\partial\alpha\partial\beta}\right)+4m\frac{\partial c}{\partial\beta}\left(a\frac{\partial c}{\partial\alpha}-a\frac{\partial a}{\partial\gamma}+c\frac{\partial a}{\partial\alpha}\right)$$
$$+2c\left(c\frac{\partial a}{\partial\beta}-a\frac{\partial c}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial m}{\partial\alpha}-a\frac{\partial a}{\partial\beta}\right)-2m\frac{\partial c}{\partial\alpha}\frac{\partial ac}{\partial\beta}+a\frac{\partial ac}{\partial\beta}\left(c\frac{\partial a}{\partial\beta}-a\frac{\partial c}{\partial\beta}\right)=0, \quad (2,3)$$

$$2mc\frac{\partial^2 ac}{\partial\beta^2}-2c\frac{\partial ac}{\partial\beta}\frac{\partial m}{\partial\beta}-2m\frac{\partial c}{\partial\beta}\frac{\partial ac}{\partial\beta}=0, \quad (3,1)$$

$$2m\left(2c\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha\partial\beta}-\frac{\partial^2 ac}{\partial\beta\partial\gamma}\right)+\left(c\frac{\partial a}{\partial\beta}-a\frac{\partial c}{\partial\beta}\right)^2=0. \quad (1,2)$$

由 (1,2) 式推知, $c\frac{\partial a}{\partial\beta}-a\frac{\partial c}{\partial\beta}$, 因而也就有 $\frac{\partial\left(\frac{a}{c}\right)}{\partial\beta}$ 与 $\gamma$ 无关; 因此如果我们令 $a=a_1+\gamma a_2$, 则推得 $a_2$ 的形式为 $cf(\alpha)$, 且 $f(\alpha)$ 与 $\beta$ 无关.

这样一来我们就有

$$(ad\alpha+cd\gamma)^2+2md\alpha d\beta=(a_1d\alpha+c(f(\alpha)d\alpha+d\gamma))^2+2md\alpha d\beta;$$

因此如果我们引进一个新的变量 $\gamma+\int f(\alpha)d\alpha$ 来代替 $\gamma$, 则二次形式就转换成另一个形状相同的形式, 其中只有 $a$ 与 $\gamma$ 无关. 在这个假定下方程 (2,2) 就取得以下形式

$$m\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial c}{\partial\alpha}\frac{\partial m}{\partial\alpha}=0,$$

由此与 (1,1) 式相结合就得到:

$$\frac{\partial\log\frac{\partial c}{\partial\alpha}}{\partial\alpha}=\frac{\partial\log m}{\partial\alpha},\quad \frac{\partial\log\frac{\partial c}{\partial\beta}}{\partial\beta}=\frac{\partial\log m}{\partial\beta},$$

由此又得到

$$\frac{\partial c}{\partial\alpha}=m\varphi(\beta),\quad \frac{\partial c}{\partial\beta}=m\psi(\alpha).$$

现在要分三种情况来讨论.

1) 如果 $\varphi(\beta)=\psi(\alpha)=0$, 则有 $c=\text{const}$. 并且由 (1,2) 推得 $\frac{\partial a}{\partial\beta}=0$. 因此如果我们引进新变量 $c\gamma+\int ad\alpha$ 来代替 $\gamma$, 那么我们就会得到, 在二次形式中会有 $a=0,c=1$, 于是由 (3,3) 式可导得

$$\frac{\partial^2\log m}{\partial\alpha\partial\beta}=0,\quad 2m=\chi(\alpha)\vartheta(\beta).$$

因此如果引进变量 $\int\chi(\alpha)d\alpha,\int\vartheta(\beta)d\beta$ 来代替 $\alpha,\beta$, 那么就会得到二次形式为

$$d\gamma^2+d\alpha d\beta,$$

通过代换 $\alpha = x + iy, \beta = x - iy, \gamma = z$, 它就会变成

$$dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

于是在这种情况下等温线 $\alpha = \text{const}, \beta = \text{const}$ 就是平行直线.

2) 如果 $\varphi(\beta) = 0$, 而 $\psi(\alpha)$ 不等于 0, 则 $c$ 与 $\alpha$ 无关, 而且由 (1,2) 式得出 $\frac{a}{c}$ 与 $\beta$ 无关. 以相似的方式我们可和在上面一样得到, 将为零, 而且进一步还有

$$\frac{1}{\psi(\alpha)} \frac{\partial c}{\partial \beta} = m,$$

由此方程 $(1,1), \cdots, (1,2)$ 全都能得到满足. 如果我们引入 $\int \frac{2d\alpha}{\psi(\alpha)}, c$ 作为新变量来代替 $\alpha, \beta$, 那么我们就将得到二次形式 $\beta^2 d\gamma^2 + d\alpha d\beta$, 它通过代换

$$x + iy = \beta, \quad x - iy = \alpha - \beta\gamma^2, \quad z = \beta\gamma,$$

就可变为 $dx^2 + dy^2 + dz^2$. 但是我们无法由此借助于方程 $\alpha = \text{const}, \beta = \text{const}$ 得到实的曲线. 由于这个原因, $\psi(\alpha) = 0, \varphi(\beta)$ 不等于 0 这种情形就不大重要.

3) 这时不论是 $\psi(\alpha)$, 还是 $\varphi(\beta)$, 都不等于零, 于是我们引入新变量 $\int \frac{d\alpha}{\psi(\alpha)}$, $\int \frac{d\beta}{\varphi(\beta)}$ 来代替 $\alpha, \beta$, 由此我们就会得到

$$\frac{\partial c}{\partial \alpha} = m, \quad \frac{\partial c}{\partial \beta} = m, \quad \frac{\partial c}{\partial \alpha} - \frac{\partial c}{\partial \beta} = 0,$$

由此就会有 $c = f(\alpha + \beta), m = f'(\alpha + \beta)$.

由 (1,3) 式得出

$$\frac{\partial \log \frac{\partial ac}{\partial \beta}}{\partial \beta} = \frac{\partial \log cm}{\partial \beta},$$

由此通过积分就得到

$$ac = f^2 \varphi(\alpha) + \psi(\alpha);$$

通过引入变量 $\gamma + \int \varphi(\alpha) d\alpha$ 来代替 $\gamma$, 就得到 $\varphi(\alpha) = 0$, 同时还得到 $ac = \psi(\alpha)$. 于是有 $(1,2)$ 导出:

$$\frac{f^3 f''}{f'} = -\psi(\alpha)^2.$$

现在因为方程一侧只与 $\alpha$ 有关, 而另一侧又只与 $\alpha + \beta$ 有关, 所以它们必定都等于一个常数 $k^2$, 由此就得出了函数应满足的一个二阶微分方程:

$$f'' - \frac{k^2 f'}{f^3} = 0,$$

据此方程 $(1,1),\cdots,(1,2)$ 全都能够得到满足. 对这个方程积分一次就得到:

$$2f' = k_1^2 - \frac{k^2}{f^2}.$$

如果我们现在令 $\alpha = x+iy, \beta = x-iy$, 并对 $\gamma$ 引入一个新的变量 $\gamma - ik\int\frac{dx}{f^2}$, 则我们将得到

$$\begin{aligned}(cd\gamma + ad\alpha)^2 + 2md\alpha d\beta &= \left(fd\gamma + \frac{k}{f}dy\right)^2 + 2f'(dx^2+dy^2)\\ &= f^2d\gamma^2 + 2kd\gamma dy + 2f'dx^2 + k_1^2dy^2.\end{aligned}$$

如我们再令

$$2f'dx^2 = \frac{df^2}{2f'} = \frac{f^2df^2}{k_1^2f^2-k^2} = d\xi^2,$$

由此就推得

$$\xi = \frac{1}{k_1^2}\sqrt{k_1^2f^2-k^2}, \quad f^2 = k_1^2\xi^2 + \frac{k^2}{k_1^2}.$$

从而我们的二次形式就转换成

$$\left(\frac{k}{k_1}d\gamma + k_1dy\right)^2 + k_1^2\xi^2d\gamma^2 + d\xi^2.$$

如果我们把这个式子放到极坐标中去, 办法就是令:

$$\xi = r, \quad k_1\gamma = \varphi, \quad k_1y + \frac{k}{k_1}\gamma = z,$$

那么它就会取下面的形式:

$$dr^2 + r^2d\varphi^2 + dz^2.$$

于是 $\alpha = \text{const}, \beta = \text{const}$ 的曲线就将为

$$r = \text{const}, \quad z - \frac{k}{k_1^2}\varphi = \text{const},$$

其中 $k$ 也可以 $=0$, 因而它们就是螺旋线或圆.

在 $k_1 = 0$ 的特殊情形下, 我们有 $\xi = \dfrac{if^2}{2k}$, 这时二次形式将为

$$-2ki\xi d\gamma^2 + 2kd\gamma dy + d\xi^2,$$

或者在我们又回来用 $\alpha, \beta, \gamma$ 代换 $\xi, \dfrac{2ky}{\sqrt{-2ki}}, \sqrt{-2ki}\gamma$, 它就写成

$$\alpha d\gamma^2 + d\beta d\gamma + d\alpha^2,$$

它再通过代换

$$
\begin{aligned}
x+iy &= \beta+\gamma y-\frac{1}{12}\gamma^3,\\
x-iy &= \gamma,\\
z &= \alpha-\frac{1}{4}\gamma^2,
\end{aligned}
$$

就可以转换成 $dx^2+dy^2+dz^2$ 的形式; 但是由此所得出的方程

$$
z+\frac{1}{4}(x-iy)^2=\alpha=\mathrm{const},
$$

$$
(x+iy)-\alpha(x-iy)+\frac{1}{12}(x-iy)^2=\beta=\mathrm{const}
$$

就不对应任何实的曲线.

在其余的情形中我尚未能完整地完成这个计算.



# 人名索引



# 专业名词索引

## (Stichwortverzeichnis)

## D



## E



## F



## G

## P



## Q



## R



## S

# 译 后 记

经过将近三百多个日日夜夜, 终于走完了一段并非平坦的路 —— 翻译 Klein 的《数学在 19 世纪的发展》第二卷之路. 在本书行将呈现在读者面前之际, 回望这段走过的路程, 不禁想起了本书第一卷英译本编者 Robert Hermann 为英译本所写的序言最后一段话: “我要感谢 Michael Ackerman 在翻译本书时所付出的赫拉克勒斯式的艰巨劳动. 那些读过原稿的人都这样评论说, 他把 Klein 的复杂的德语散文译得多么流畅和美丽.” 在译述的过程中会经常想到这句话. 因为在我看来, 译者与作者不同, 作者在写作时心中只有一个上帝, 那就是他的读者, 而译者在译述之时, 心中怀有两个上帝, 一个是他所翻译的作品的作者, 还有一个就是他的读者. 他必须对他所译作品的作者负责, 处处做到不要误解作者, 更不能曲解作者. 对读者要负的责任主要有二: 一是他所译的作品是值得读者把时间花上去的, 二是他的译述应该尽可能地准确而又流畅地再现了原作, 使读者能够享受到阅读的乐趣, 欣赏到原著的精彩, 这一点与对作者负责是一致的. 著名作家钱锺书先生说得好, 好的翻译为作者赢得读者, 坏的翻译使作者失去读者, 因为译文好, 读者才会进一步产生愿望去阅读原作. (钱锺书:《林纾的翻译》)

在当今知识爆炸的年代, 也是图书出版大泛滥的年代. 每当走进图书城, 面对图书的一片汪洋, 都不禁会感慨万千. 一方面是看到有这么多的好书、可读的书, 真是目不暇接, 不免有一天只有二十四小时太短之憾. 回想 “文革” 前的那些年月里, 一无读物, 二无时间. 劳动回来躺在大统铺上, 一本外文科技图书的征订目录, 翻到破了还在大家手中传阅的情景, 真是感到现在年轻人的幸运. 另一方面, 正像当前的大市场的情况一样, 我们又有更多的无奈. 看到许多无聊的、甚至是假、冒、伪、劣的东西, 虽说作者有写作的自由, 出版社有从经营考虑的权利, 我们应该心存宽容, 只是不免有些担心上演 “劣币驱逐良币” 之虞. 特别值得关心的是, 读者, 尤其是年轻的读者, 面对这一片汪洋的图书, 怎样找到值得一读的读物, 避免在阅读上

浪费时间呢? 对此我们不能不想到 "书评" 的功能. 好的书评是读者的向导, 作者的诤友, 出版业的良心. 可惜的是时下这种书评还不够多, 而在科技 (包括科普) 图书方面更是少见, 专门以科技图书为评介对象的刊物 (或是专栏) 似乎还没有出现 (至少是我尚未见到, 在《数学译林》上有时能看到一些书评, 但那只是对国外的读物, 而且也不是每期都有). 深刻, 公正, 热心而又有良心的科技图书的书评, 我们大家都在期待着. 在出好书上, 作者 (包括译者) 自然更是责无旁贷, 他们在创作的时候, 不管他们心中在想些什么, 也总应该要想到读者, 想到读者花在阅读上的每一分钟都是他们生命的一部分. 谈到这一点, 就本书来说, 本书编者, 著名数学家 R. Courant, 在其第一卷的前言中作了极好的概括:

> "这些讲义是一个在科学的多事之秋有过丰富人生历练的人的成熟之作, 它们体现了作者的卓越智慧, 深邃的历史眼光, 高度的人文精神和大师级的创造力; 它们必将对所有的数学家和物理学家, 并将远远超出这个范围, 产生巨大的影响."

凡是读过第一卷的读者肯定会与编者深有同感. 著名数学家 J. Struik 曾在其名著《数学简史》的推荐书目中这样评价本书:"最好的 19 世纪数学史". 我们注意到, 这里说的是 "最好的", 而不是 "最好的 ······ 之一". Klein 不只是一个伟大的数学家, 又是一个伟大的思想家, 也是一个热心数学教育事业、有眼光、有魄力的改革家, 还是一个对社会有责任心的科学家. 他富于历史眼光, 喜欢把数学放在历史的背景中去考察, 在他的教学和所写的著作中常常都包含着有关历史的分析. 写一本 19 世纪的数学史, 是当时许多数学家对 Klein 的期待, 但是由于各种事务的繁忙, 对同行们的建议, 他只能暂时放在一旁. 待到一战爆发, 战事中止了他的许多活动, 终于给了他来完成这件大家所期待的工作的时间. 本书是作者于一战时期在自己寓所的餐厅内对为数不多的少数听众所作的讲演, 时断时续, 一直延续到 1919 年. 在这部著作中并不只是单纯罗列一些事实, 而是着重阐明它们在数学发展中的意义. 由于其中有不少事件是作者亲历, 读来令人倍感生动、亲切. 在他去世前不久, 1925 年的春天, 他接受了 N. Wiener 的拜访, 后来 Wiener 这样回忆了那次会面的印象: "这位伟人 ······ 具有一种阅历丰富、知识广博的智者风采 ······ 当他谈起过去时代的伟大人物时, 他们就不再只是一些不可捉摸的、写过一些论文的作者, 而都变成栩栩如生的人了." 所以在作者健在时这些讲义就有许多打印文本在广为流传, 使我们不禁想起了当年的《红楼梦》, 显示了它的强大魅力. 第一卷的译者, 我国知名数学家齐民友先生曾在译序中对第一卷作过相当深入的评述.

第二卷与第一卷有所不同, 涉及的面较窄, 是专门讲不变量理论以及相对论的数学源头, 用 Klein 的话来说, 就是相对论的史前史中的数学部分, 其中也包含了 Klein 个人的一些研究成果. 狭义相对论可以说就是 Lorentz 群变换下的不变量理论, 而广义相对论在某种意义上则可说是在一般点变换群下的不变量理论. 在这个意义上来讲, 相对论在思想上与 Klein 在 "Erlangen 纲领" 中提出的思想是一脉相

承的. 相对论与 19 世纪数学在思想上以及在历史上的联系第一次在这本书中得到了详细的论述. 与许多伟大的数学家一样, Klein 十分重视数学与物理之间相互依存的关系. 在他早年的研究工作中, 由于受到业师 Plücker 的影响, 对力学就做过深入的探讨, 提出了描写刚体运动的独特参数, 这就是后来有名的 Cayley–Klein 参数. 他与 A. Sommerfeld 合著的巨著:《Theorie der Kreisels (陀螺理论)》, 洋洋大观, 一共有四卷, 至今仍是这方面最完善、最权威的著作. H. Goldstein 在其名著《经典力学》一书中称它为 "陀螺理论的不朽著作". 在这本合著的书中, 很多思想都是源自 Klein. 例如, 在该书的第一章中就讨论了无限小转动、Cayley–Klein 参数以及它们与同图变换、四元数理论的关系, 这在当时为所仅见. 读了本书就不难理解为什么是这样了. Klein 在讲授本书时正值他人生的最后一个创造高峰期, 正如本书编者在其前言中所说的那样: "*那正是广义相对论吸引着全球数学家和物理学家的年代. Felix Klein, 作为一个七十岁高龄的老人, 以异乎寻常的精力投入到这一新理论的研究之中. 在这一研究时期所集结起来的讲座笔录、通信、演讲稿、笔记和论文稿, 由 Klein 本人整理, 装满了整整七大公文包.*" 从这里我们看到, Klein 并不是像有的微词所认为的那样, 把他后半生的精力都转移到数学教育和行政管理中去了, 脱离了数学研究的主流. 我们知道, 正是在这个时期 Hilbert 也被卷入了物理研究. 为了能够了解当前物理研究的动向, 他还专门请 Sommerfeld 先后派 P. Ewald 和 A. Landé 来当他的物理助手, 并于 1912 年邀请 Sommerfeld 到 Göttingen 讲学, 介绍物理学的最新进展. 我们还知道, Hilbert 还几乎同时独立于 Einstein 用不同的方法得到了广义相对论中的引力场方程这样惊人的成果. 这个时候他在同行们的眼中俨然已经是个物理学家了. 从 1910 年后的十几年里他把相当大的一部分精力转移到物理上, 而按照 H. Weyl 的说法: "…… 理论物理也被 Hilbert 纳入了他的研究领域: 自 1912 年开始的十年间, 它成了 Hilbert 兴趣的中心." 当时他的主要目标是建立物理学的公理系统, 并在 von Neumann 的协助下合作发表了建立量子力学基础的论文. Klein 没有赶上量子力学的诞生, 但他在相对论的发展上作出了重要的贡献. 在我们上面提到的那本《陀螺理论》的书第四卷中就用四维的非欧空间讨论了电动力学和狭义相对论. 在 Minkowski 刚提出 Minkowski 空间后不久, 他就在 1910 年发表了《Über die geometrische Grundlage der Lorentzgruppe (论 Lorentz 群的几何基础)》一文. 他在狭义相对论方面的一些重要建树在本书中也有所反映. 例如, 狭义相对论中的刚体运动问题, 由于有 Lorentz 收缩, 曾困惑过不少人, 就在本书中得到了澄清. 甚至在今天许多谈相对论的出版物中讲到了刚体的书都不多. 遗憾的是, 他在广义相对论方面的贡献, 例如, 建立引力场能量 – 动量守恒定律的微分形式, 讨论守恒定律的积分形式与封闭宇宙模型之间的关系, 等等, 由于原来计划的第四章未能得以编辑出版, 我们不能在本书中从这方面一睹 Klein 的讲述风采. 更值得一提的是, 为了呼应 Hilbert 建立公理化的物理基础的努力, 他还写了《Zu

Hilbert erster Note über die Grundlagen der Physik (关于 Hilbert 论物理学基础的第一篇注记)》一文 (1917-1918), 给 Hilbert 的计划以有力的支持. 已届古稀之年的 Klein 认为自己找到了可以用他的 "Erlangen 纲领" 的思想来清理相对论的基本定律之路. 可见讲 Klein 不支持 Hilbert 的公理化方法的说法未必真正反映了 Klein 思想的实质.

本卷不同于第一卷的还有一点, 它不再是按时间发展的顺序来讲述, 而是将被时间分割开的不变量理论及其在物理中的应用归拢到一起做系统的论述, 从而使本书成为学习不变量理论及其在物理学中应用的一本极好的教材, 它在这方面的价值至今仍不可低估. 上面我们已经提到, Klein 非常重视数学教育, 本人也很热心于数学的教学, 而且他的讲课非常出色, 闻名遐迩, 受到普遍的称赞, 名声甚至远传到了美国. 1896 年他被邀请到美国 Princeton 大学讲学, 后来就以这次讲学的讲稿为基础出版了一本专著:《The Mathematical Theory of the Top (陀螺的数学理论)》, 这本书到 20 世纪 70 年代还在美国再版. Klein 的讲课之所以有吸引力是因为: 在内容上他特别注意讲清该学科与其他学科之间的联系, 使得听者能够从整体上来把握; 在方法上注意从历史的分析上讲清概念的来龙去脉, 能够适应学者接受新事物的心理; 在目的上则不单是重视形式运算能力的训练, 更重视联系实际能力的培养, 充分发展学生对自然界和人类社会进行数学观察与分析的能力. Klein 认为只有这样他那丰富多彩的思想以及分析问题和解决问题的方法才能传给下一代. Klein 的这些思想在 1904 年的自然科学家 Breslau 会议上的讲话中得到了充分的表白, 也清晰地体现在他那些广受欢迎的讲义和著作中. 这些著作在当时就广为流传, 被译成多种文字 (我国近年来也陆续出版了几种), 至今仍拥有倾心的读者. 当时的青年就是以能听到 Klein 的讲课, 或者以能见到他、亲耳聆听他的教诲为幸事. 被誉为 20 世纪最伟大的数学家的 David Hilbert 曾在大家为他庆祝七十岁生日的宴会上深情地回忆起自己成长的经历时, 就把早年在 Koenisberg 与 Minkowski 和 Hurwirtz 的相识以及在取得博士学位后去 Leipzig 对 Klein 的访问看成自己一生头等的幸事. 两位大数学家的会面立即碰出了友谊的火花, 从此结下了深厚的友谊. 日后 Klein 先后把 Hilbert 和 Minkowski 延聘到 Göttingen, 终于把 Göttingen 建成世界数学的中心, 这一段历史常常被传为 19 世纪至 20 世纪之交数学史上的佳话. 我庆幸自己能有从事翻译 Klein 本书的机会, 使我能够认真、细致地阅读本书, 享受到阅读的真正乐趣, 一年来翻译的辛苦也就得到了报偿. "幸福的时光幸福都是相似的", 我相信阅读了本书的读者一定会与译者有相似的感受, 他们花在阅读本书上的时间是值得的.

本书原来计划还有的第四章是讲广义相对论和在切触变换与连续群的 Lie 理论观点下的 Hamilton 力学的. 今天讲述经典力学的书何啻汗牛充栋, 与之相比这样讲 Hamilton 力学的书也可以说算得上是凤毛麟角了. 写到这里我们不禁想起了

在 20 世纪 80 年代 В.И.Арнольд 的《经典力学的数学方法》一书的出版在业界引起的广泛重视和喜悦 (此书在我国也由高等教育出版社出版了由齐民友先生翻译的中译本). 可惜的是, 这些内容由于Klein 的遗稿不够完整而未被编辑出版. 按照本书编者的说法,"我们并不缺少对相对论的这样一种表述", 我们实难表示苟同. 尤其令人扼腕的是, 编者告诉我们,"在这方面有许多不同年份的底稿", 不知在国内如何才能读到这些呢? 译者不禁忽发奇想, 不知哪一天有人出来像刘心武先生续写《红楼梦》那样, 依据 Klein 的遗稿把这第四章续写出来, 并且能够得以出版, 那将是一件有益于学人的幸事. 我们期待着.

---

在 19 世纪下半叶最重要的数学文献中我们选了与本书的内容密切相关的几篇译出作为本书的附录. 第一篇是作为本书核心思想的《Erlangen 纲领》, 还有就是 Riemann 论几何基础的惊世之作, 接下来的是 Riemann 应征巴黎科学院悬赏求解问题的论文, 通常称之为《巴黎之作》, 它是前一篇论文重要补充, 常常被看成是它的姊妹篇. 后来在齐民友先生的提议下, 又选了 Riemann 在 Gauß 指导下的博士学位论文《单复变量函数的一般理论基础》一文. 这些文献对于一个西方的读者来说也许不难读到, 文字上的障碍也许不大, 对于国内的读者情况就大不一样了. 非常高兴我们的提议能够得到出版社的大力支持.

下面来和大家分享一下我们对这几篇论文的了解和体会.

**附录 I《Erlangen 纲领》.** 这是 Klein 的标志性的著作, 是他对后来数学发展影响最大的论文. 19 世纪上半叶几何学的急剧发展使原来统一的几何学发展成彼此几乎毫不相关的一系列分支: 由 Monge (1794)、Poncelet (1813)、Möbius (1827)、Plücker (1834)、Steiner (1833)、von Staudt (1848) 等人所发展起来的射影几何 (综合的和解析的); Gauß (1827)、Riemann (1854) 的曲面论; Lobatschewsky (1829)、Bolyai (1832)、Riemann (1854) 等人的非欧几何; Hamilton (1843) 的四元数; Graßmann (1844) 的延伸量理论; 由 Cayley、Sylvester、Aronhold、Clebsch 等人发展起来的不变量理论 (1850 — 1870); 以及 Listing (1847)、Möbius (1863)、Riemann (1854、1857) 等人发展起来的拓扑学. 在这种背景下, Klein 和 Lie 于 19 世纪 70 年代初来到巴黎, 结识了 Darboux (这时 Darboux 与 Lie 同为 27 岁, Klein 是 22 岁) 和 C. Jordan. 他们从 Jordan 的巨著《置换群》中受到极大的启发. Klein 以 Galois 和 Jordan 把群论应用到方程式论为榜样, 把群论应用于空间理论, 用变换群的概念把几何的各个分支统一了起来, 这就是著名的《Erlangen 纲领》(1872), 这时 Klein 才 23 岁. 从此, 群论就以重要角色的面貌出现在数学舞台上. H. Weyl 曾在《Felix Kleins Stellung in der mathematische Gegenwart (Felix Klein 在当代数学中的地位, Die Naturwissenschaften, 1930, H. 1)》一文中认为《Erlangen 纲领》的思想方法支配了其后五十年间的几何研究. M. J. Greenberg 在其所著的《欧氏几何与非欧几何

(发展与历史)》一书中更是认为"Erlangen 纲领对直到今天的所有数学都有过巨大的冲击."20 世纪的大几何学家, 陈省身的业师 W. Blaschke 曾经这样说过: "我把我的一生都奉献给了将 Erlangen 纲领应用于微分几何."

在《Erlangen 纲领》中, Klein 首先在前两节着重阐述了他的基本思想, 从第三节开始次第展开了对射影变换群、径向反演变换群、有理点变换群、一般点变换群、切触变换群的讨论. 这里核心的概念是流形和变换群, 中心的思想就是: "给了一个流形以及在其上的一个变换群, 要求人们来研究有关属于这个流形的几何形体的那样一些性质, 它们在这个群的变换下保持不变."或者也可以这样来说: "给了一个流形以及在其上的一个变换群, 要求建立相对于这个群的不变量理论."

《Erlangen 纲领》充分体现了 Klein 思想方法的特征, 这就是各个学科的相互渗透和融合.《Erlangen 纲领》可以说是群 (Galois) 与流形 (Riemann) 的融合; 他的自守函数的理论也可以说是群与 Riemann 面的融合; 他的关于二十面体的书:《Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade (论二十面体及五次方程的求解讲义)》(1884, Leipzig, Teubuner) 更是把几何学、代数学、函数论和群论结合起来对其主题进行讨论, 被方家誉为"一曲由深刻关系支配着的旋律谱就的交响乐", 百年之后在俄罗斯还出版了它的译本, 书后当代世界著名数学大师 В.И.Арнольд 还写了一篇长文作了高度的评价. Klein 深信, 在深层次上数学是一个统一的整体. 他善于从各个数学分支的比较中抓住它们之间的关联, 并进而提炼出将它们统一起来的核心概念. 这也是我们在阅读本文是要注意抓住的东西.

**附录 II 是 Riemann 的博士论文.** 1851 年 12 月 Riemann 获得了博士学位, 指导教师就是 Gauß. 同时在 Gauß 手下读博士学位的还有 Dedekind, 他在接下来的次一年初也通过了博士论文答辩. 那时 Gauß 已经 75 岁, 仍然敏锐地注意到了 Riemann 这个罕见的数学天才. 他对 Dedekind 的论文只是讲了一些例行的评语, 而对 Riemann 的博士论文他却作出了很高的评价: "Riemann 先生的学位论文令人信服地表明作者在本文涉及的理论中进行了彻底而深刻的研究, 显示出作者富有真正创造性的、活泼的数学心智, 取得了辉煌的、充满独创精神的成果."在评审结束后的回家路上非常动情地和同事这样谈论道 —— 而 Gauß 是一个很少动感情的人 ——: "一项重大而有价值的成果, 不仅符合对博士论文所要求的各项标准, 而且远远超出了它们."这篇论文是复变函数论发展史上的光辉一页, 著名的 Cauchy–Riemann 方程就是第一次在这篇论文中以它们的现代形式出现. 但是它对后来数学发展最大的影响是: Riemann 在这里开创性地将函数论与在当时还只是刚刚冒芽的拓扑学相结合, 第一次提出了 Riemann 面的概念. 虽然论文得到了 Gauß 的高度评价, 但在当时还没得到大家的重视. 然而, 在 1857 年, 他发表了论文《Abel 函数理论》, 立即就被公认为极为重要的贡献. 一两年之后, 他的名字就被全欧洲

的数学家所知道. 正是基于他在 1851 年的博士论文和 1857 年关于 Abel 函数的论文, 1859 年的 8 月 11 日, 在他 33 岁前不久, 柏林科学院决定任命他为通讯院士. Riemann 在他的博士论文中对单连通和多连通的概念以及对多值函数 Riemann 面的概念的阐述非常透彻, 就是对今天学习复变函数理论的学子来说, 仍具有极大的参考价值.

**附录 III 是 Riemann 著名的就职试讲论文.** 这是 Riemann 对后世影响最大的一篇论文. 取得任职资格的程序是这样的: 首先要提交一篇书面论文, 然后还要在全系教师面前做一次试验性的演讲 (试讲). 他提出的书面论文《论用一个三角级数表示函数的可能性》向世界贡献了 Riemann 积分, 是分析发展史上的一个里程碑. 但是他的任职资格讲演的历史意义远远超过了这篇论文.

他被要求提出三个题目, 由他的指导教师 Gauß 从中指定一个作报告. Riemann 提供的三个题目, 两个是关于数学物理的, 一个是关于几何的, Gauß 指定的正好就是 "论奠定几何学基础之假设" 这个题目. 1854 年的 6 月 19 日, 一个载入数学史册的日子, Riemann 在 Göttingen 大学哲学系的全体教工面前发表了具有重大历史意义的讲演. 有人评论说, 这是世界上有史以来所发表过的论文中十篇最顶级的论文之一. 正如 Hans Freudenthal 在《科学家传记辞典》所讲, 它是 "**数学史上的一盏明灯**", 照亮了几何基础上空的一片黑暗. 而 Riemann 本人也以其不满四十岁的短暂一生, 像一颗彗星般耀眼地划过布满人类精英的灿烂星空.

H. Freudenthal 的评论并非过誉之词. 我们不妨来看看他在演讲中的开门见山的一段话 (其中加粗为译者所标):

"众所周知, 几何学把空间的概念以及在空间中作图的基本规则这二者都预设为某种给定了的东西. 它给出它们的定义只是名义上的, 而其实质的规定则是以公理的形式出现. **从而这些预设 (Voraussetzung) 的关系仍然处于黑暗之中**; 人们既看不清楚, 它们的联系是否和在何种程度上是必须的, 也不能先验地知道它们是否可能.

**即使是从 Euklid 到 Legendre, 把现代那些最有名的几何革新家都算上, 无论是数学家, 还是投身于此的哲学家, 都未能使这一黑暗得到澄清.** 其原因很可能就在于, 多重延伸量 (mehrfach ausgedehnter Grössen) 的一般概念, 空间量 (Raumgrössen) 就包含于其中, 仍然还没有研究出来. 因此我给自己首先就提出这样的任务, 从一般的量的概念来构造一多重延伸量的概念. 由此得出, 一多重延伸量可以有不同种类的度量关系, 因而空间只不过是三重延伸量的一个特殊情形. 但是由此就有一个必然的结论, 这就是, 几何学的命题不可能由一般量的概念推导出来, 相反, 那些把空间与其他可以想象得到的三重延伸量区分开来的性质只能从经验中来获得. 于是就引出了这样一个问题, 寻求那种足以规定空间度量关系的最简单的事实 —— 根据这组事情的本质, 这是一个不能完全确定的问题; 因为允许

有多组简单事实, 它们都足以用来规定空间的度量关系; 对当下的目的来说最重要的就是 Euklid 奠定基础的那一组. 这组事实, 和其他事实一样, 不是必然的, 但从经验上是肯定的, **它们是假设 (Hypothesen); 因此对其可信性人们是可以研究的, 虽然在观察的范围内这一可能性是很大的, 并进而由此探索将它们扩展到观察的范围之外, 既向无限大的方面扩展, 又向无限小的方面扩展的许可性.**"

有谁能不为读到这一段而感到心灵的震撼呢? 空间的概念和作图的规则这些几何最根本的东西只是一些预设, 而这些预设中的关系**仍然处于黑暗之中. 有史以来的哲学家、数学家以及几何学的革新家, 都未能使这一黑暗得到澄清.** 这对当时几何基础现状的描述是多么令人惊心动魄. Riemann 勇敢地面对这一黑暗, 天才地指出问题的根本原因就在于: 多重延伸量的概念 (用今天的话来说就是高维空间的概念, 后来 Riemann 把它们称之为 "流形 (Mannigfaltigkeiten)") 仍然还没有研究出来, 而空间量的概念就包含在其中 (在这里我们要注意到, 在 Riemann 那个时代 "空间" 一般就是指当时几何学所研究的现实空间). Riemann 在这里的天才思想在于, 我们要认识 "空间" 的本质必须站到多重延伸量的制高点上去考察. 从而得出 "那些把空间与其他可以想象得到的三重延伸量区分开来的性质只能从经验中来获得. 于是就引出了这样一个问题, 寻求那种足以规定空间度量关系的最简单的事实". 接着他又大胆地指出, 由 Euklid 奠定基础那一组事实, 虽然从经验上是肯定的, 但不是必然的, 而只是**假设 (Hypothesen)**, "**因此对其可信性人们是可以研究的**", 这样的话难道还不会令人感到振聋发聩吗? 人们的思想好像一下就豁然开朗, 好像在黑暗中看到了光明. Riemann 真的是举起了一盏明灯, 他还要把它的亮光既照向无穷大, 又照向无穷小. 仅仅从这几百字的开篇中我们就看到了 Riemann 博大的胸怀, 高屋建瓴, 势如破竹的气势, 和前无古人、敢于超越的创新精神. 这时我们就不禁会联想起读唐人陈子昂的《登幽州台赋》时的那种怆然的感受: "前不见古人, 后不见来者, 念天地之悠悠, 独怆然而泪下". 悠悠万事, 唯此为大, 还有什么个人的得失不能放下呢? 读这样的文章, 接受到大家风范的熏陶, 心灵好像都得到了洗涤. 仅仅这几百个字就有强大的吸引力, 使你无法释手. 这是一篇百读不厌的奇文. 就连像 Clifford 这样的大家, 在读完此文后都忍不住亲自动手把它译成了英文. 后来 Dedekind 在其所写的 Riemann 小传中回忆了 Gauß 在听了 Riemann 试讲后的激动心情、在回家的路上与 Weber 一起热烈地议论着 Riemann 的深刻思想的情景.

Riemann 思想的深刻性不仅表现在对非欧几何合理性的支持, 而且在他的老师 Gauß 的思想的启发下, 敢于冲破 I. Kant (康德) 哲学思想的束缚, 指出了现实空间的度量结构并非先验地就是 Euklid 的, 而是要由经验来确定的, 在推向无穷大的时候很可能是非欧的 (non-Euclidean). 由于他建立了高维空间的度量二次微分形式的一般理论, 人们不再局限于二维的曲面, 而可以研究高维度的弯曲空间, 这就为

建立弯曲空 - 时的广义相对论提供了有力的数学工具. 后来 Einstein 自己就说过, 没有 Riemann 几何的思想和工具是不可能建立广义相对论的. Riemann 的思想对建立广义相对论的作用是数学家们经常所乐于称道的. 可是人们却较少地注意到, Riemann 在本文中不仅将他的思维的光芒照向了无穷大, 也照向了无穷小. 我们不妨来读一读他在本文最后几段所说的话 (其中加粗为译者所标):

"如果假设存在与位置无关的物体, 则曲率会处处为常数, 于是由天文测量得出, 它不可能异于零; 或者说无论如何它的倒数是这样大的一个面积的值, 我们的望远镜所能达到的范围与它相比肯定可以忽略不计. **可是如果这种物体与位置的无关性不成立, 则由大范围内的度量关系就得不出无限小的范围内的度量关系来; 于是只要在每一可测的空间部分中总曲率不是明显异于零, 则在每一点在三个方向的曲率就可以取任意值; 如果线元可用一二次微分式的平方根来表示的假设不成立, 更为复杂的关系就可能出现. 但是现在看来确立空间度量基础的经验的概念, 即刚体和光线的概念, 在无穷小的范围内已经失效; 因此很可以设想, 在无穷小的范围内空间的度量关系与几何学的假设并不相符, 实际上人们应该这样设想, 只要通过这样的设想能用更简单的方式来解释现象就可以了.**

关于几何学的假设在无限小的范围内是否有效的问题与寻求空间度量关系的内在基础密切相关. 就后面这个问题而言, 它仍然可以说是关于空间学说的问题, 在上面关于应用的评述中就提到过, 在离散流形的情况下, 度量关系的原则就已经包括在这个流形的概念之中了, 而在连续流形的情况下这个原则就必须从外面另外加上去. 因而这就必定是, 要么作为空间基础的实在 (Wirkliche) 必定形成一个离散流形, 要么这一度量关系的基础就要到外部去寻找, 到作用于其上 (指这个实在 —— 译者注) 的结合力上去找.

这个问题的解决只能这样来寻求, 这就是从今天所有的经过经验考验、并且是由 Newton 为之奠定了基础的、对现象的理解出发, 然后再在它不能解释的事实的推动下逐渐加以改造; **这种像我们在这里所做的从一般的概念出发的研究只能做到, 不让这一研究工作受到概念局限性的阻碍, 使我们对事物之间联系的认识上的进步不会因传统的偏见而受到束缚.**

这就把问题引导到了另一个科学领域, 物理学的领域, 正是由于今天这个会的性质不允许我来谈它."

在这里我们特别注意到 Riemann 讲到: "**但是现在看来确立空间度量基础的经验的概念, 即刚体和光线的概念, 在无穷小的范围内已经失效; 因此很可以设想, 在无穷小的范围内空间的度量关系与几何学的假设并不相符**". 多么惊人的远见卓识. 只是由于广义相对论的发展吸引了人们太多的注意, Riemann 在这同一篇文章中的这一高瞻远瞩的思想没有得到应有的重视, 等到量子力学诞生之后才由伟大的数学家和物理学家 H. Weyl 指出了这一点. 他在 1931 年发表的《几何学与物理学》(Die

Naturwissenschaften, 19, 49 – 58, 1931) 中这样写道:

“当 Riemann 建立他的微分几何时, 他提出 Euklid 公理只在无限小有效而在大范围内无效的前提. 但他没有忘记补充说明: ‘空间规则所根据的经验概念, 如固体的概念和光束的概念等, 在无限小的时候失去其有效性.’ 在量子理论中, 我们相信已经认识到, 那些概念在接近无限小的时候是如何变得站不住脚的: 当维度达到了作用量子的有限值能被感觉到时, 所有物理量的统计学上的不确定性就越来越强地显示出来.”

这一点在近年来更在颇受人关注的 “超弦 (superstring)” 理论中得到了应验: 按照这个理论, 在尺度为 Plank 单位 ($\sim 10^{-35}$cm) 范围内, 空间是 11 维的, 而基本粒子则是在这个空间中的 “弦”. 但是这个 11 维的空间只有一个时间维和三个空间维是伸展开来的, 其他维都卷起来了, 好像是一块铺开的毛巾上的那些卷起来的纤维.

关于弦论进一步的发展, 著名数学家和理论物理学家、量子几何的创始人之一、1990 年数学 Fields 奖获得者的 E. Witten 认为 “主要障碍是核心的几何思想 —— 它必须作为弦论的基础, 就像 Riemann 几何作为广义相对论的基础一样 —— 还未被发现, 充其量我们也只是抓住了皮毛, 揭露了那些最终被视为更主要思想的附带结果那样的东西. 探索这些更主要的思想, 在现在基本上是物理学家们全力以赴的数学问题.” 弦论被越来越多的科学家预测将引起第三次物理学革命. 在这次物理学的革命中数学可能落后了. 写到这儿不免产生 “如果 Riemann 活在今天” 的遐想. 多么令人怀念的 Riemann 啊!

当然, 读这样的文章是需要用心又要用脑的. 虽然当时 Riemann 为了让听众中那些非数学专业的教授们也能听懂, 很少采用数学式子, 但由于论题本身的深奥, 论述哲学的深度, 使得有人甚至认为这是一篇数学 — 哲学论文. Riemann 在他的演讲的第一节就这样申明: “我想应该允许我要求批评有更多一些的宽容, 因为我在哲学性质的一类研究工作做得很少, 其中的困难更多地是在概念上, 而不是在构造上, 而且除了从枢密顾问 Gauß 先生在他的第二篇论双二次余式的论文, 在 Göttingenschen gelehrten Anzeigen (Göttingen 学术通报), 以及在他的五十周岁纪念册得到就此所作的一些非常简短的提示, 再就是从 Herbart 的一些哲学研究得到点提示之外, 我再无其他前期工作可资利用.” 可见 Riemann 对这个问题进行过很深入的哲学思考. Riemann 有很高的哲学天赋, 总是把所有的数学工作都放在更大的哲学背景下来考察. 正如 H. Freudenthal 在《科学家传记辞典》所讲:

“作为历史上最渊博和最有想象力的数学家之一, 他有很强的哲学兴趣, 甚至是一个大哲学家. 要是他生存和工作得再长一些, 哲学家们会承认他是他们中的一

员."

Klein 在本书中就谈到过自己年轻时阅读此文时的感受: "《就职试讲》发表的时候正好是我开始独立研究数学问题之际, 所以我对 Riemann 的思路在那时对年轻的数学家所产生的异乎寻常的印象至今记忆犹新. 许多对我们都显得晦涩和难于理解, 然而又感到深不可测. 这些地方对那些一开始就在他的思维方式下接受了所有这一切的、今天的数学家来说, 只会为他的叙述的清晰和简练而惊讶不已." 虽然 Klein 在这里说到在 Riemann 思想培育下成长起来的新一代数学家能够更好地理解本文, 但是就我们所知, 许多即使是今天的数学家理解它仍然感到并非易事. 这也是很自然的事, 轻而易举就能得到的东西绝不会是深刻的. 我们希望读者在阅读本文时多下点工夫, 多读一遍, 肯定会有多一分的收获. 这大概也可算是读经典论文一个经验之谈吧!

**附录 IV 《巴黎之作》.** 这篇论文之所以常常与 Riemann 的《就职试讲》联系起来讲, 就是因为其中包含了对该文所表述的结果的一个解析表述, 这就是: 寻求能够将一个二阶微分表达式变换成另一个, 特别是具有常系数的二阶微分表达式的条件, 正如本文第二部分的标题所示:《**关于将表达式** $\sum_{i,i'} b_{i,i'} ds_i ds_{i'}$ **变换成给定的形式** $\sum_{i,i'} a_{i,i'} dx_i dx_{i'}$》. Riemann 在本部分一开始是这样讲的: "因为在要研究的问题中, 最著名的科学院提出要限于那种情况, 物体是均匀的, 其中的导热系数为常数, 所以我们首先来建立保证能够通过将变量 $s$ 代换成变量 $x$ 的方法, 将表达式 $\sum_{i,i'} b_{i,i'} ds_i ds_{i'}$ 变换成形式 $\sum_{i,i'} a_{i,i'} dx_i dx_{i'}$, 其中系数 $a_{i,i'}$ 为常数的条件. 然后再对变换到有变系数的形式作简短的说明." 这个问题自从在 Riemann 的《就职试讲》一文中第一次出现以来已经得到了 Christoffel 与 Lipschitz 的深入研究, 他们从各种不同的途径得到了与 Riemann 所得到的相同的结果 (Crelles 杂志, 第 70, 71, 72, 82 卷). 后来 R. Beez 也研究了这个课题 (Schlömlich 杂志, 第 20, 21, 24 卷). 在完成了这个任务之后, 他紧接着来解决巴黎科学院所提出的那个问题. 他是这样来开头的:

"现在我们回过来研究最著名的科学院所提出的问题, 我们必须在上述六个方程中代入在上面所确立了的所有可能的函数 $b$ 的形式, 并由此求出所有那些情形, 在其中均匀物体中的温度 $u$ 是时间和只有两个变量的函数.

但是时间的不足不允许我们在此写下这些计算. 因此我们只限于指出必须采用的方法, 列举所提出问题的个别解."

但是令人遗憾的是, 正是由于没有 "在此写下这些计算", Riemann 的应征竟然落选了. Klein 在本书中不无遗憾地这样谈到这件事: "接下来的 Nr. 2 (指《巴黎之作》—— 中译者注), 叙述文本非常简短, 带来了补充公式, 特别是对任意的 $ds^2$ 的

全曲率的定义式. 人们不禁要问, Riemann 怎么会把如此重要的创建托付给一篇应征的论文, 尔后却还给压着不发表 (因为科学院对这个新思想的内涵开始一点也不知道). 这里就是经济关系介入我们科学发展的切入点, 参与一项学术评奖的申报在当时还是数学研究者希望能够改善他们微薄收入的、不多的方法之一. 奖金, 它后来成为学术机构或研究所对受奖人巨大的科研能力的一种认可, 在那时还没有成为一种惯例."

这时候的德国还是封建 (或者说至少是半封建) 的时代, 科学家们还要通过参与评奖来改善他们微薄的收入, 想到被贫病困扰的 Riemann 过早地结束了他天才的一生, 真是令人唏嘘不已!

为了使读者能更易于理解 Riemann 在本文中对所给出的计算准则的叙述, 在 Riemann 全集的第一版中就附加了一份注释, 这份注释是以 R. Dedekind 的一份以前的 (未发表的) 研究为基础的. 后来感到这份注释还有点太短, 所以在出第二版时 H. Weber 就补上了一份更为详尽的注释. 这份注释比 Riemann 本文还要长, 我们一并译出, 以飨读者.

这篇论文除了上述广泛受人瞩目的内容之外, 其实它的原本主题是解决一个有关热传导的数学物理的问题的. Riemann 在解决这个问题时, 仍然秉承他一贯高瞻远瞩的风格: 首先将问题提到最一般的高度来考察. 他在论文的一开始是这样说的:

"对最著名的科学院所提出的这个问题我们将这样来进行研究, 首先求解更一般的问题:

确定物体内热的运动的性质以及热分布该如何才能使等温曲线组恒保持为等温曲线,

然后再来研究

从这个问题的一般解挑出那种情况, 其中这些性质处处都保持一样, 即物体是均匀的."

事实上 Riemann 在数学物理的发展上的贡献也是具有历史地位的. 他在这方面的工作和讲课经 Weber 整理成了一本名著:《数学物理中的偏微分方程》, 在 19 世纪末到 20 世纪 30、40 年代也曾风靡一时, 被人称为《Riemann–Weber》, 和著名的《Courant–Hilbert》交相辉映. 记得在上个世纪 50 年代读书时, 还能看到它经常被引用, 现在就很少看到了. 现在知道这本书的年轻人恐怕已经不多, 看来它可能就要淡出人们的记忆了. 中国素以保存经典最为丰富著称, 不要说像四书五经这样的显学, 就是一些名不见经传的著作也能找到. 译者在上个世纪的 50 年代起就很想设法读到《Riemann–Weber》, 至今大半个世纪过去了, 仍未能如愿. 在我们今天大力弘扬国学的时候, 是不是也应该想到世界著名的经典之作呢? 我们的邻居日本, 甚至包括斯大林专制时代的苏联, 都出过那么多世界著名经典的译著! 把我们祖国的优秀传统和全球的普世价值相融合, 这大概也是我们现代化的必由之路吧?

今天总算读到了 Riemann 的《巴黎之作》, 由此来想象《Riemann–Weber》的风采于万一, 也算是 "尝鼎一脔" 吧! 我诚心邀请读者来共同欣赏, 它是具有 Riemann 另一种特色的创造.

---

翻译第一要务莫过于准确地传达原作的本意. 虽然翻译科技作品有科技本身的逻辑做向导这个有利条件, 但是在翻译 Klein 及 Riemann 的著作过程中仍然会遇到相当费解的地方. 这个时候只有反复琢磨, 尽可能查阅几种不同的字典, 直至把这个句子完全准确地背下来, 在心中反复诵读, 进行各式各样的组合, 有时碰到十分复杂的情况甚至茶思饭想, 躺在床上也思考, 实在想不通, 就暂时放一放, 接着往下译. 过些时候再回过头来想, 终于突然电路接通了, 眼前一亮,"找到了" 的喜悦涌上心头. 这样的过程多次出现, 几乎屡试不爽. 做翻译这件事, 最基本的就是要认真, 不要自己骗自己. 自己不严把关, 就难免漏洞百出. 有时看到一些莫名其妙的译文, 真是怀疑译者是不是自己搞懂了.

自己懂了, 还要让读者懂, 就必须用地道的中文来表达, 这是我们要追求的第二个目标. 这个目标达不到, 译文就让读者大伤脑筋, 译文的价值就要大打折扣. 大翻译家傅雷先生说得好: "*理想的译文仿佛是原作者的中文写作. 那么原文的意义与精神, 译文的流畅与完整都可以兼筹并顾, 不至于再有以辞害意, 或以意害辞的弊病了.*" 放低一点要求讲, 起码要读起来能上口, 要能让人一口气读下来, 这才能让读者享受到阅读的乐趣. 读译著, 特别是科技方面的译著, 大概都有过这样的经验, 有时候读译著读不懂, 一查原文就懂了, 原来是译者译错了. 有时候读原文不懂, 一查译文懂了, 就感到这样的译文即使是对能读原文的读者来说, 也是有存在价值的.

对文学作品的翻译人们还强调准确地传达出原文的风格, 所谓要做到 "形神兼备". 其实伟大科学家大多有自己独特的个性和思想, 各不相同的思维方法和思考习惯, 各不相同的哲学倾向和表述方式, 所以写出来的东西也有自己鲜明的风格. 只是由于文学作品写的是作者眼中的社会、人物、生活, 作品的风格跃然纸上, 而科学家写的则是大自然 (实在), 是同一个、唯一的大自然 (实在), 他们写作的风格与写的内容融为一体, 所以其风格往往不大为人所注意. 科技作品的译文如果能够完整准确地传达其内容与思想, 往往风格也就在其中了, 未必需要刻意地去追求. 我们读本书附录中的几篇文章, 不是已能感受到作者的风格吗? 不是能够感受到 Riemann 的磅礴的大气, Klein 的登高望远的精神气度吗?

简言之, 我们追求尽可能做到 "准确、流畅". 由于习惯写大白话, 深知自己的毛病可能在 "流畅有余, 简洁不足". 至于是否能够做到百分之百的准确, 实在不敢奢望, 因为每一次检阅都会发现各式各样的错误. 当我收到余建明先生的所做的审阅稿后, 展读之下, 不禁大惑不解, 不知为什么会出那么莫名其妙的错误. 不禁想起了傅雷先生在 "《高老头》重译本序" 的一条注释中讲的话: "*误译的事, 有时即译*

者本人亦觉得莫名其妙. 例如近译《贝姨》, 书印出后, 忽发现原文的蓝衣服译作绿衣服, 不但正文错了, 译者附注也跟着错了. 这种文字上的色盲, 真使译者大惊失'色'". 就拿本书的原版来说, 应该错误很少吧? 季羡林先生就说过 "德国书中错误之少, 是举世闻名的" 这样的话, 我们在做学生时就深有同感. 看英文原版的书, 大都有勘误表附在书前或书后, 而德文原版的书, 则几乎是绝无仅有. 可是奇怪的是, 我们在翻译本书的过程中就不止一次发现原书中的错失, 虽然多是小错, 但为了尊重经典, 我们在改动的地方大都加以注明 (除了极个别的外). 可见 "错误难免", 但这决不能成为 "错误有理" 的托词. 对付错误的办法就是耐心地多几次审阅,"无错" 的极限是存在的.

Klein 的这本第二卷的翻译依据的是 Springer 在 1926 年出的版本, 附录 I、II、III 依据的是 Klein 全集与 Riemann 全集的新的版本, 同时附录 III 还参照了其英文和俄文的译文. 附录 IV 是用拉丁文写的, 临时抱佛脚, 现学一点, 只能作参照, 所以主要还是按其俄文译文转译的. 如果本书有再版机会, 希望到时能直接从拉丁文重译一遍.

---

在整个翻译的过程中不断地怀念起舍弟, 我国奇点理论的拓荒者李培信先生, 是他让译者知道并读到本书. 在他生前我每到北京时, 我们总是畅谈到深夜: "奇文共欣赏, 疑义相与析". 所以每当译到 Klein 的精彩讲述时, 总想和他分享: 每当遇到翻译中的难题时, 总想同他商议. 他也曾很希望能将本书译出贡献给国人, 并曾为此组织人力和联系出版之事操过心. 现在这本书终于出版了, 我想首先告慰的就是他.

这本译著得以出版, 如果说还算差强人意的话, 那么没有几位朋友的无私帮助, 是不可能完成的. 首先要提到科学院数学研究所的余建明先生, 他的帮助是不可或缺的. 余先生从德国取得博士学位后回数学所工作. 余先生热爱数学, 兴趣广泛, 有相当好的文字 (包括德文) 的素养, 我在翻译中遇到的难题总是向他请教, 他也总是有问必答. 这里举一个例子. Klein 在书中引用到 Jacobi 在就职演讲中的一段话, 是用拉丁文讲的, 我当时对拉丁文一无所知, 只得向余先生求救, 问他有没有办法. 他在北京未能解决的情况下, 致函他在德国的友人, 而这位友人又辗转请教到他的一位精通拉丁文的朋友, 把它译成了德文. 这位友人非常欣赏这段话, 又特地把它译成英文, 一并发到余先生处转来, 令我非常感动. 余先生是把这本书的翻译当成自己的工作了. 原来我们相约共同来承担这份工作的, 后来由于他任务增加而未能实现. 他审读了本书全部的内容, 提出了许多有益的建议, 大部分我都采用了. 虽然余先生为此书付出了自己的知识和心力, 书中还存在的缺点和错误当然都应该由译者个人负全部责任.

本书的责任编辑李鹏先生为本书翻译提供了许多便利, 好意地接受了我的许多

请求. 单就找本书的原本来说, 先是上中科院的图书馆复印, 因为那里的版本是影印本, 没有书后的索引, 后来又跑国家图书馆, 终于找到了 Springer 的原版, 又再复印了一本. 因为翻译中难免会遇到一些不好理解的地方, 很希望有一本他种文字的译本作为参考. 这本书的英译本只有第一卷, 后来听说有全部的俄译本, 李鹏先生为此费了不少的工夫, 结果也没能找到. 他还从网上为我下载了许多有用的资料, 包括从 Riemann 全集的俄译本中选在本书附录中的三篇文章. 在后期还给我发来 H. Weyl 在 1919 年编辑出版的 Riemann《就职试讲》, 在文前 Weyl 还写了一篇很重要的《前言》并在文后附上极有价值的《注释》, 可惜这次已来不及加进去了, 希望将来能有机会补上. 这篇文章过去一直被简称为《就职演讲》, 我是看了 Weyl 在他的这篇前言中的提法, 改译为《就职试讲》的. 齐民友先生对本书的翻译也非常关心, 特地找到《就职试讲》的 Clifford 的英译由李鹏先生传给我, 这份译文对我帮助很大, Clifford 的译文非常精彩, 紧扣原文而又非常流利, 真做到了如傅雷先生所讲的那样:“好像是原作者的英文写作”, 成为我翻译中的一个很好的榜样. 武汉大学数学系的张敦穆教授, 辽宁科技大学理学院院长何希勤先生都很关心本书的翻译工作, 也为我提供了不少帮助. 在这里我向他们一并表示我衷心的谢意.

最后, 我不能忘了对两位医德高尚的大夫表示我的深深谢意, 他们是鞍山市中医院副院长、眼科主任王洪刚大夫和北京大学附属第三医院眼科中心主任郝燕生大夫, 是他们以高超的技术, 先后为我精心地做了青光眼和白内障的手术, 成功地为我保住了视力, 这样我才有可能来完成这件工作. 他们是人间真正的白衣天使.

李培廉

2011 年 5 月 6 日

本书是 F. 克莱因的名著《数学在19世纪的发展》的第二卷。与第一卷有所不同，它是专门讲述不变量理论以及相对论的数学源头，即相对论的数学史前史的，其中也包括了克莱因本人的一些研究成果。从数学上来讲，狭义相对论可以说就是在 Lorentz 变换群下的不变量理论，而广义相对论则可说是在一般点变换群下的不变量理论。在这个意义上，相对论与克莱因的《Erlangen纲领》在思想上是一脉相承的。相对论与19世纪数学在思想上与历史上的联系第一次在本书中得到了详细的论述。

本书不再是按时间发展的顺序讲述，而是将不变量理论及其在物理学中的应用归拢到一起做系统的讲述。时至今日，它仍是学习不变量理论及其应用的一本极好的教材，对学习数学和物理的学生和教师都有极高的参考价值，也适合对数学及科学思想文化发展感兴趣的读者阅读。

■ 学科类别：数学史

academic.hep.com.cn


ISBN 978-7-04-032284-2

9 787040 322842 >

定价 69.00 元